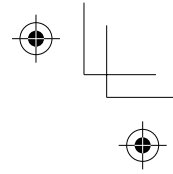


责任编辑 于海燕

封面设计  尤岛设计



“十四五”职业教育江苏省规划教材  
“十四五”江苏省职业教育在线精品课程

高等数学

# 高等数学

“十四五”职业教育江苏省规划教材  
“十四五”江苏省职业教育在线精品课程

高等数学

大学生安全教育

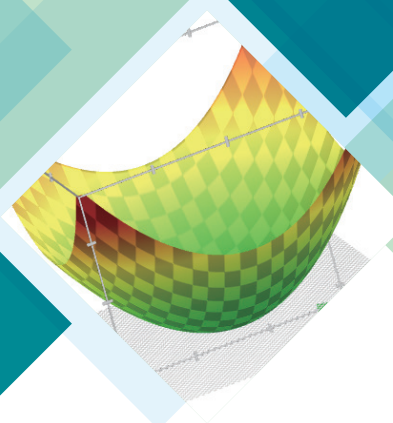
大学生创新创业素养教程

线性代数

大学物理

主编  
顾新辉  
曹 军

主编 顾新辉 曹 军



ISBN 978-7-5661-4470-6

9 787566 144706 >

定价：39.00元

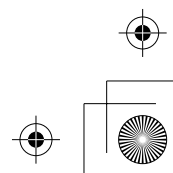
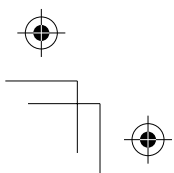
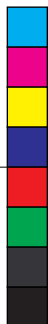
  
哈尔滨工程大学出版社  
Harbin Engineering University Press



哈尔滨工程大学出版社  
Harbin Engineering University Press



PPT课件 教案  
习题与答案 微课



“十四五”职业教育江苏省规划教材  
“十四五”江苏省职业教育在线精品课程

# 高等数学

主编 顾新辉 曹 军

 哈尔滨工程大学出版社  
Harbin Engineering University Press

## 内 容 简 介

本书主要内容包括函数与极限、函数的连续性、导数及其应用、微分、不定积分和定积分等。多元函数的微积分为选学部分，旨在与一元函数的微积分进行类比提升。

本书可作为各专业高等数学的教材或教学参考用书。

## 图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 / 顾新辉, 曹军主编. -- 哈尔滨 : 哈尔滨工程大学出版社, 2024. 7. (2025. 6 重印)

ISBN 978-7-5661-4470-6

I. 013

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2024ZD2256 号

高等数学

GAODENG SHUXUE

责任编辑 于海燕

封面设计  尤岛设计

---

出版发行 哈尔滨工程大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区南通大街 145 号

邮政编号 150001

电 话 0451-82519989

经 销 新华书店

印 刷 北京俊林印刷有限公司

开 本 787 mm×1 092 mm 1/16

印 张 13.5

字 数 294 千字

版 次 2024 年 7 月第 1 版

印 次 2025 年 6 月第 2 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5661-4470-6

定 价 39.00 元

http: //www. hrbeupress. com

E-mail: heupress@hrbeu. edu. cn

---

## 编写委员会

主 编：顾新辉 曹 军

副主编：许冬云 褚智伟 董晓媛 杨 宁

姜黎鑫 褚正清 孙 军





# 前言

本书是与 2022 年江苏省“十四五”职业教育首批在线精品课程“高等数学（一）”配套的纸质教材，有完整的教案、课件、教学视频和资源库。第一章至第六章主要包含：函数与极限、函数的连续性、导数及其应用、微分、不定积分和定积分。第七章多元函数的微积分为选学部分，旨在与一元函数的微积分进行类比提升。党的二十大报告提出，高质量发展是全面建设社会主义现代化国家的首要任务。高等数学课程不仅是一门重要的公共基础课，也是进一步学习现代科学知识的必修课，在培养学生的逻辑推理能力、几何直观能力与计算能力方面起着不可替代的作用，是培养高质量发展创新型人才的基础。

本书具有如下特点。

1. 突出应用能力的培养。针对学生实际，从基础理论到实际应用逐层推进，书中富含具有实际应用背景的例题和习题，旨在锻炼学生学以致用能力，不仅实现授之以鱼，而且力求授之以渔。通过多角度的实际应用来欣赏数学之美。
2. 注重课程思政的渗透。每章的开始对本章重要的数学思想和相关的史实进行介绍，引入古今中外数学家的名言，课程中适时嵌入爱国主义教育的相关内容，将价值塑造、知识传授和能力培养有机融为一体。
3. 凸显数学实验的魅力。本书提供了 17 个探究案例，让学生经历猜想、验证、探究和证明的过程，在函数的变化、参数的动态调整过程中，感受数学实验带来的乐趣。
4. 关注数学问题的梯度。每小节都配备了一定数量的练习题，每章的最后还配备了总习题，题型采用“高等数学”考试的试题形式，分为选择题、填空题、计算题和证明题等，题目按照由易到难的原则设计，并配有适量的真题。

本书由顾新辉、曹军担任主编。参与本书编写工作的人员有许冬云、褚智伟、董晓媛、杨宁、姜黎鑫、褚正清、孙军等。本书的编写得到学校和出版社的大力支持与帮助，在此一并表示感谢！

由于编者水平有限，书中的疏漏、错误在所难免，恳请同行和读者批评指正，以便修订时完善。

编者



# 目 录

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| 第一章 追溯古人智慧 感受分析思想——函数与极限 ..... | 1  |
| 课程思政元素 .....                   | 1  |
| 第一节 函数 .....                   | 3  |
| 第二节 数列的极限 .....                | 11 |
| 第三节 函数的极限 .....                | 17 |
| 第四节 两个重要极限 .....               | 25 |
| 第五节 无穷小与无穷大 .....              | 32 |
| 鱼骨图小结 .....                    | 36 |
| 总习题一 .....                     | 36 |
| 第二章 品味生活气息 体悟严谨细致——函数的连续性..... | 39 |
| 课程思政元素 .....                   | 39 |
| 第一节 函数的连续性 .....               | 40 |
| 第二节 连续函数的运算法则 .....            | 46 |
| 鱼骨图小结 .....                    | 51 |
| 总习题二 .....                     | 51 |
| 第三章 惊叹国家速度 明晰变化速率——导数及其应用..... | 53 |
| 课程思政元素 .....                   | 53 |
| 第一节 导数的概念 .....                | 54 |
| 第二节 函数的求导法则 .....              | 63 |
| 第三节 隐函数的导数 .....               | 68 |
| 第四节 中值定理 .....                 | 73 |
| 第五节 洛必达法则 .....                | 80 |



|                                       |            |
|---------------------------------------|------------|
| 第六节 函数的单调性与凹凸性 .....                  | 84         |
| 第七节 函数的极值与最值 .....                    | 90         |
| 第八节 函数图形的描绘 .....                     | 96         |
| 鱼骨图小结 .....                           | 99         |
| 总习题三 .....                            | 100        |
| <b>第四章 融合日常生活 体会细微乐趣——函数的微分 .....</b> | <b>103</b> |
| 课程思政元素 .....                          | 103        |
| 第一节 微分的定义 .....                       | 103        |
| 第二节 基本初等函数的微分公式与微分的近似计算 .....         | 107        |
| * 第三节 曲率 .....                        | 113        |
| 鱼骨图小结 .....                           | 117        |
| 总习题四 .....                            | 118        |
| <b>第五章 探寻规则变幻 追求完美卓越——不定积分 .....</b>  | <b>119</b> |
| 课程思政元素 .....                          | 119        |
| 第一节 不定积分的概念 .....                     | 119        |
| 第二节 不定积分的第一类换元积分法 .....               | 126        |
| 第三节 不定积分的第二类换元积分法 .....               | 130        |
| 第四节 不定积分的分部积分法 .....                  | 133        |
| 鱼骨图小结 .....                           | 136        |
| 总习题五 .....                            | 136        |
| <b>第六章 畅游微积世界 品味数学神奇——定积分 .....</b>   | <b>139</b> |
| 课程思政元素 .....                          | 139        |
| 第一节 定积分的概念 .....                      | 140        |
| 第二节 定积分的基本性质 .....                    | 145        |
| 第三节 微积分学基本定理 .....                    | 148        |
| 第四节 定积分的换元积分法和分部积分法 .....             | 152        |
| 第五节 定积分的应用 .....                      | 156        |
| 鱼骨图小结 .....                           | 163        |
| 总习题六 .....                            | 163        |



|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| 第七章 再攀课程高峰 绘制工匠蓝图——多元函数的微积分 ..... | 166 |
| 课程思政元素 .....                      | 166 |
| 第一节 空间直角坐标系 .....                 | 166 |
| 第二节 二元函数的极限和连续性 .....             | 174 |
| 第三节 偏导数 .....                     | 179 |
| 第四节 全微分 .....                     | 182 |
| 第五节 偏导数的应用 .....                  | 186 |
| 第六节 二重积分 .....                    | 191 |
| 鱼骨图小结 .....                       | 203 |
| 总习题七 .....                        | 203 |
| 参考文献 .....                        | 206 |



# 第一章

## 追溯古人智慧 感受分析思想——函数与极限

### 课程思政元素

我国古代名著《庄子·天下篇》中有一句名言：“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”其意思为：一尺的木棍，每天截取它的一半，永远都截不完。这反映了 2000 多年前我国古人所持有的极限观念。



庄子



刘徽



李善兰

我国魏晋时期的数学家刘徽(约 225—295)在《九章算术》“割圆术”中描述道：“割之弥细，所失弥少，割之又割以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”这一无限趋近的过程体现了极限思想的雏形。

极限思想体现了中华文明在数学上的贡献，是中华文化优秀传承中的重要代表。

李善兰是中国近代著名的数学家、天文学家、力学家和植物学家，他创立了二次平方根的幂级数展开式，研究各种三角函数、反三角函数和对数函数的幂级数展开式(现称“自然数幂求和公式”)，这是李善兰也是 19 世纪中国数学界最重大的成就。在嘉兴坐馆期间，李善兰创立了“尖锥术”，指出“盈尺之书，由叠纸而得；盈太之绢，曲积丝而成也。”，这就是他的微积分思想，与西方牛顿、莱布尼兹的微积分思想如出一辙。他还利用“垛积术”推出著名的“李善兰恒等式”，这是世界上第一个用中国人名字命名的数学公式。用现代语言描述如下：

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i}^2 \binom{n+2k-i}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

李善兰，晚清科学的先驱与数学巨擘。这位 19 世纪的伟大科学家，以其卓越的才华



和深厚的学识，成为中国科学史上的璀璨明星。李善兰生于1802年，浙江海宁人。他生活在一个充满变革的时代，晚清时期的中国正面临着前所未有的挑战与机遇。在家庭的教育下，李善兰自幼便对数学产生了浓厚的兴趣。他凭借自身的勤奋与天赋，深入研究数学领域，并在19世纪的中国率先引入了西方先进的数学知识。

李善兰不仅是一位杰出的数学家，更是一位科学思想的传播者。他深知科学对于国家的重要性，因此在传播数学知识的同时，也致力于推动科学的普及。他通过撰写科学杂志、翻译西方科学著作等方式，让更多的中国人了解到了科学的魅力。在他的努力下，科学观念开始在中国社会中得到广泛的传播。

除了数学与科学，李善兰在多个领域都有着深厚的造诣。他精通文学、历史、哲学等多个学科，这些知识为他日后的科学研究提供了坚实的支撑。他能够将各学科的知识融会贯通，从而在科学研究上取得更加卓越的成就。

值得一提的是，李善兰在晚年时期投身于天文学的研究。他通过观测天象、分析数据等方式，为中国天文学的发展做出了杰出的贡献。他的研究成果不仅提升了中国天文学在国际上的地位，更为后来的科学研究提供了宝贵的资料。

李善兰的成就并非一蹴而就，而是源于他对科学的执着追求与不懈努力。他时刻保持着对新知识的渴望，不断挑战自我、突破自我。正是这种精神，使他能够在科学的道路上越走越远。

李善兰的生涯可谓波澜壮阔，他的成就在中国科学史上留下了浓墨重彩的一笔。他不仅是一位杰出的科学家，更是一位伟大的教育家、思想家。他的影响并不局限于科学领域，而是更深远地影响了中国的思想文化和社会发展。他的生涯见证了中国近代史上的巨变，也展现了一位伟大科学家对国家、对人类的无私奉献。

数学是无穷的科学，其真理深邃且美丽。

——李善兰

数学是唯一与时不变的真理，数学的美和真将引领百科，带动科学走向世界的最前沿。

——丘成桐

函数概念是近代数学思想之花。

——托马斯

初等数学主要研究对象是常量，而高等数学主要研究对象是函数。所谓函数就是指变量之间的一种依赖关系。极限概念是研究函数概念的理论基础，极限方法则是研究微积分学的一种基本分析方法。本章将介绍函数、极限的基本知识和基本方法，为后续章节的学习奠定扎实的基础。



## 第一节 函 数

### 一、映射

映射是现代数学中的一个基本概念，函数是一种特殊的映射，函数是微积分的主要研究对象。本节主要介绍映射、函数、复合函数等基本概念。

**定义 1** 设  $X, Y$  是两个非空集合，如果存在一个对应法则  $f$ ，使得对  $X$  中每一个元素  $x$ ，按照对应法则  $f$ ，在  $Y$  中有唯一确定的元素  $y$  与之对应，那么称  $f$  为从  $X$  到  $Y$  的映射，记作

$$f: X \rightarrow Y$$

其中  $y$  称为元素  $x$  在映射  $f$  下的像，记作  $f(x)$ ，即  $y=f(x)$ 。元素  $x$  称为元素  $y$  的一个原像。集合  $X$  称为映射  $f$  的定义域，记作  $D_f$ ， $X$  中所有元素的像组成的集合称为映射  $f$  的值域，记作  $R_f$ ，即

$$R_f = \{f(x) \mid x \in X\}$$

**例 1** 设  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ，对每一个  $x \in \mathbf{R}$ ， $f(x) = x^2$ 。显然， $f$  是一个映射， $f$  的定义域是  $\mathbf{R}$ ，值域是  $R_f = \{y \mid y \geq 0\}$ 。

**例 2** 设  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ，对每一个  $x \in \mathbf{R}$ ， $f(x) = x^3$ 。显然， $f$  是一个映射， $f$  的定义域是  $\mathbf{R}$ ，值域也是  $\mathbf{R}$ 。即  $R_f = \mathbf{R}$ 。

**例 3** 设  $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ， $Y = \{(0, y) \mid |y| \leq 1\}$ ， $f: X \rightarrow Y$ ，对于每一个  $(x, y) \in X$ ，都有唯一确定的  $(0, y) \in Y$  与之对应。显然， $f$  是一个映射， $f$  的定义域是  $X$ ，值域是  $Y$ 。几何上，这个映射表示将平面上单位圆（圆心在原点，半径为 1 的圆）周上的点投影到  $y$  轴的区间  $[-1, 1]$  上。

从映射的定义可以看出，构成一个映射必须具备三个要素：集合  $X$ （定义域）；集合  $Y$ （值域的范围： $R_f \subset Y$ ）；对应法则  $f$ ，使得对每一个  $x \in X$ ，在  $Y$  中都有唯一确定的  $y = f(x)$  与之对应。

从上面的例子可以发现，映射的值域  $R_f \subset Y$ ，元素  $y \in R_f$  的原像不一定是唯一的。

本书将要研究的是从实数集（或者其子集） $X$  到实数集  $Y$  的映射，通常称为定义在  $X$  上的函数。

### 二、函数

**定义 2** 设数集  $D \subset \mathbf{R}$ ，则称映射  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  为定义在  $D$  上的函数，通常记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中,  $x$  称为自变量;  $y$  称为因变量.

函数的定义中, 对于每一个  $x \in D$ , 按照对应法则  $f$ , 在  $\mathbf{R}$  中都有唯一确定的值  $y$  与之对应, 这个对应的值称为函数  $f$  在  $x$  处的函数值, 记为  $f(x)$ , 即  $y = f(x)$ .  $D$  称为定义域, 全体函数值所构成的集合称为函数的值域, 记为  $R_f$  或者  $f(D)$ , 即

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

一个函数的值域由定义域及对应法则完全确定. 函数的定义域可以用区间来表示, 也可以用集合来表示.

### 1. 函数的两个要素

例 1 中, 定义域  $D = \mathbf{R}$ , 值域为  $R_f = \{y \mid y \geq 0\}$ . 例 2 中, 定义域  $D = \mathbf{R}$ , 值域也为  $\mathbf{R}$ .

 **例 4** 求下列函数的定义域.

$$(1) f(x) = \sqrt[3]{x};$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{1-x^2};$$

$$(3) f(x) = \sqrt{x-1};$$

$$(4) f(x) = \ln(x^2 + 2x - 3).$$

**解** (1) 定义域为  $\mathbf{R}$ .

(2) 分母不能为零, 所以  $1-x^2 \neq 0$ , 解得  $x \neq \pm 1$ , 所以函数的定义域为  $D = \{x \mid x \neq \pm 1, x \in \mathbf{R}\}$ , 也可写为  $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ .

(3) 偶次根式中的被开方式必须非负, 所以  $x-1 \geq 0$ , 解得  $x \geq 1$ , 所以函数的定义域为  $D = \{x \mid x \geq 1\}$ , 也可写为  $D = [1, +\infty)$ .

(4) 在对数式中, 真数必须大于零, 所以  $x^2 + 2x - 3 > 0$ , 解得  $x > 1$  或  $x < -3$ , 所以函数的定义域为  $D = \{x \mid x > 1 \text{ 或 } x < -3\}$ , 也可写为  $D = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ .

确定函数有两个要素——定义域和对应法则. 所以, 要判断两个函数是否相同, 只要判断其定义域和对应法则是否完全相同即可.

 **例 5** 判断函数  $f(x) = x+1$  和  $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  是否为同一个函数.

**解**  $f(x) = x+1$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 而  $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  的定义域为  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ , 因此, 虽然这两个函数在  $x \neq 1$  时,  $f(x) = g(x)$ , 但它们的定义域不同, 所以它们是两个不同的函数.

 **例 6** 设  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 求  $f(2)$ ,  $f(a)$ ,  $f[f(x)]$ .

**解**  $f(2) = \frac{1}{2},$

$$f(a) = \frac{1}{a},$$

$$f[f(x)] = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

## 2. 函数的表示方法

表示函数的主要方法有三种：解析法(公式法)、表格法和图形法。

**解析法** 用解析表达式表示函数的方法叫作解析法，也

叫作公式法。例如  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $s = vt$  都是用解析法表示的函数。其优点是便于理论推导和数值计算。用解析法表示函数有时需用几个数学式子来表示，例如符号函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

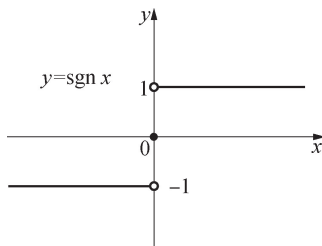


图 1-1-1

如图 1-1-1 所示。

在自变量的不同取值范围内，对应法则用不同的式子表示的函数，称为分段函数。

**表格法** 指以表格形式表示函数的方法叫作表格法。这种方法常用于设计工作，如列车时刻表、三角函数表(如表 1-1-1)等。其优点是简单明了，便于应用。

表 1-1-1 三角函数表

| $\alpha$      | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$      | $120^\circ$           | $135^\circ$           | $150^\circ$           | $180^\circ$ |
|---------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------|
| 函数            | 0         | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$      | $\frac{3\pi}{4}$      | $\frac{5\pi}{6}$      | $\pi$       |
| $\sin \alpha$ | 0         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{1}{2}$         | 0           |
| $\cos \alpha$ | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | $-\frac{1}{2}$        | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | -1          |
| $\tan \alpha$ | 0         | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | $\infty$        | $-\sqrt{3}$           | -1                    | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0           |
| $\cot \alpha$ | $\infty$  | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | -1                    | $-\sqrt{3}$           | $\infty$    |

**图形法** 以图形表示函数的方法叫作图形法。这种方法在工程技术上应用较为普遍，例如生产的甘特图、仪器的记录等。其优点是直观性强，可观察函数的变化趋势。

## 3. 单值函数和多值函数

在函数的定义中，对每一个  $x \in D$ ，如果对应的函数值  $y$  总是唯一的，这样的函数称为单值函数。如果给定一个对应法则，对每一个  $x \in D$ ，总有确定的  $y$  值与之对应，但这个  $y$  不总是唯一的，这种法则确定的函数称为多值函数。本书中的函数如果没有特别说明，都是指单值函数。

例如，设变量  $x$  和  $y$  之间的对应法则由方程  $x^2 + y^2 = 1$  给出，显然，对于每个  $x \in [-1, 1]$ ，由方程  $x^2 + y^2 = 1$  可确定对应的  $y$  值，当  $x = \pm 1$  时，对应  $y = 0$  一个值；当  $x$  取  $(-1, 1)$  内任意一个值时，对应的  $y$  值有两个。所以这个方程就成了一个多值函数。

## 4. 反函数

**定义 3** 设函数  $y = f(x)$ ,  $x \in D$ ，值域为  $R_f$ 。如果对每一个  $y \in R_f$ ，都有唯一的一个

$x \in D$ , 使得  $f(x) = y$ , 那么就确定了一个以  $y$  为自变量的函数, 称为函数  $y = f(x)$  的反函数, 记作  $x = f^{-1}(y)$ .

习惯上, 用  $x$  表示自变量,  $y$  表示因变量. 因此, 一般地,  $y = f(x)$ ,  $x \in D$  的反函数记作  $y = f^{-1}(x)$ ,  $x \in f(D)$ .

例如, 函数  $y = \sqrt[3]{x}$ , 定义域和值域都为  $\mathbf{R}$ , 对于每一个  $y \in \mathbf{R}$ , 都有唯一一个  $x \in \mathbf{R}$ , 使得  $x^3 = y$ . 从而函数  $y = \sqrt[3]{x}$  的反函数为  $x = y^3$ ,  $y \in \mathbf{R}$ , 习惯起见, 反函数记为  $y = x^3$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 如图 1-1-2 所示.

又如  $y = \sin x$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  的反函数为  $y = \arcsin x$ ,  $x \in [-1, 1]$

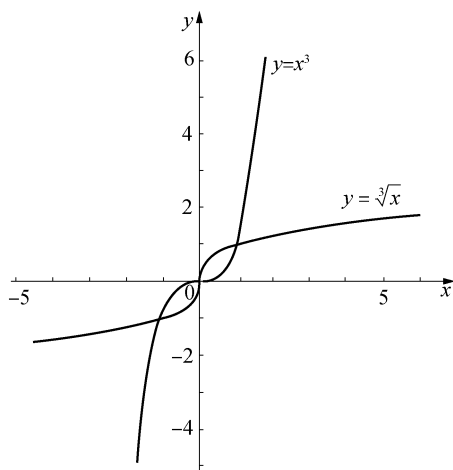


图 1-1-2

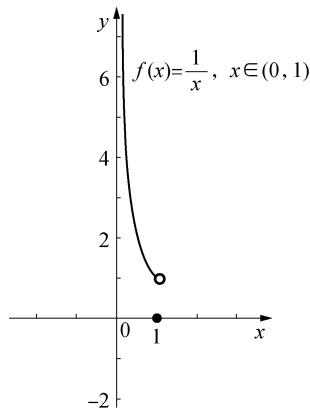


图 1-1-3

## 5. 函数的几种特性

一般地, 为了更全面地了解函数的性态, 通常从有界性、单调性、奇偶性和周期性这四个方面加以研究.

### (1) 有界性

**定义 4** 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 如果存在常数  $M > 0$ , 使得对于任意的  $x \in I$ , 都有  $|f(x)| \leq M$ , 则称函数  $f(x)$  在  $I$  上有界, 或者称  $f(x)$  是  $I$  上的有界函数. 如果这样的正数  $M$  不存在, 则称函数  $f(x)$  在  $I$  上无界, 或者称  $f(x)$  是  $I$  上的无界函数.

例如, 函数  $f(x) = \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是有界函数, 因为存在常数 1, 使得对于任意的  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 都有  $|f(x)| \leq 1$ .

又如函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  内是无界函数, 因为不存在这样的正数  $M$ , 使  $\left|\frac{1}{x}\right| \leq M$  对于  $x \in (0, 1)$  内的一切  $x$  都成立, 如图 1-1-3 所示.

可以用反证法证明. 假设存在  $M_0 > 0$  (不妨设  $M_0 > 1$ ), 使  $\left|\frac{1}{x}\right| \leq M_0$  对于  $x \in (0, 1)$  内的一切  $x$  都成立, 事实上, 只要取  $x = \frac{1}{M_0 + 1}$ , 则有  $\left|\frac{1}{x}\right| > M_0$ , 与假设矛盾, 所以函数

$f(x)=\frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  内是无界函数.

### (2) 单调性

**定义 5** 设函数  $y=f(x)$  的定义域为  $D$ , 区间  $I \subset D$ , 如果对于区间  $I$  上任意两点  $x_1$  及  $x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

那么称函数  $y=f(x)$  在区间  $I$  上是单调增加的, 如图 1-1-4 所示.

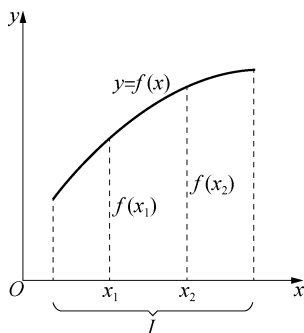


图 1-1-4

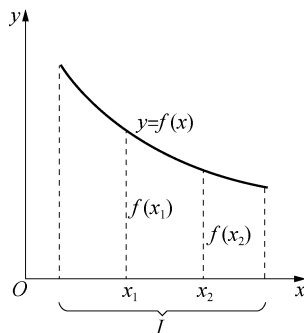


图 1-1-5

如果对于区间  $I$  上任意两点  $x_1$  及  $x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

那么称函数  $y=f(x)$  在区间上是单调减少的, 如图 1-1-5 所示.

例如, 函数  $f(x)=x^3$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上是单调增加的, 如图 1-1-6 所示.

又例如, 函数  $f(x)=|x|$  在区间  $(0, +\infty)$  上是单调增加的, 在区间  $(-\infty, 0)$  上是单调减少的, 如图 1-1-7 所示.

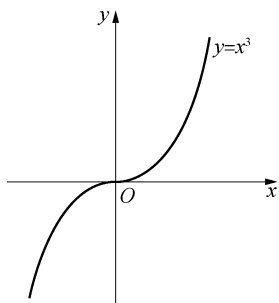


图 1-1-6

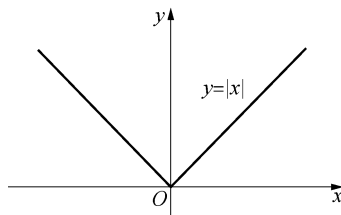


图 1-1-7

### (3) 奇偶性

**定义 6** 设函数  $f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称. 如果对于任意的  $x \in D$ , 都有

$$f(-x) = f(x),$$

则称  $f(x)$  是偶函数; 如果对于任意的  $x \in D$ , 都有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称  $f(x)$  是奇函数.

例如,  $f(x) = x^2$  是偶函数, 因为对任意的  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 都有

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

又如  $f(x) = \sin x$  是奇函数, 因为对任意的  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 都有

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x).$$

既不是奇函数也不是偶函数的函数称为非奇非偶函数. 例如函数  $f(x) = x^2 + x^3$  就是非奇非偶函数.

偶函数的图形关于  $y$  轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

 **例 7** 证明函数  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  是奇函数.

**证明** 函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 关于原点对称, 又对于任意的  $x \in \mathbf{R}$ , 都有

$$f(-x) = \ln[-x + \sqrt{1+(-x)^2}] = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = -f(x),$$

所以函数  $f(x)$  为奇函数.

(4) 周期性

**定义 7** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ . 如果存在一个正数  $T$ , 使得对于任意的  $x \in D$ , 都有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称  $f(x)$  为周期函数,  $T$  称为  $f(x)$  的周期, 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如, 函数  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$  都是以  $2\pi$  为周期的周期函数; 函数  $f(x) = \tan x$  是以  $\pi$  为周期的周期函数.

并非每个周期函数都有最小正周期. Dirichlet 函数就属于这种情况.

 **例 8** Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{Q}^c \end{cases}$$

容易验证这是一个周期函数, 任何正有理数  $r$  都是它的周期. 因为不存在最小的正有理数, 所以它没有最小正周期.

## 6. 复合函数

实际问题中建立变量之间的函数关系往往非常复杂, 自变量与因变量之间不一定有直接的依赖关系, 因而常常借助中间变量来建立所需要的函数关系.

例如, 球的体积  $V$  是其半径  $r$  的函数:  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . 由于热胀冷缩, 球的半径又随着温度  $T$  变化而变化, 假定  $r$  随  $T$  变化的规律是  $r = r_0(1 + 0.01T)$ , 其中  $r_0$  为常数. 将其代入  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , 即得到  $V$  对  $T$  的函数关系式  $V = \frac{4}{3}\pi [r_0(1 + 0.01T)]^3$ .

函数  $V = \frac{4}{3}\pi [r_0(1 + 0.01T)]^3$  可以看成由函数  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  和函数  $r = r_0(1 + 0.01T)$  复合

而成的.

**定义 8** 设函数  $y=f(u)$  的定义域为  $D_f$ , 函数  $u=g(x)$  的定义域为  $D_g$ , 且其值域  $R_g \subset D_f$ , 则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)], x \in D_g$$

称为由函数  $u=g(x)$  与函数  $y=f(u)$  构成的复合函数, 它的定义域为  $D_g$ , 变量  $u$  称为中间变量.

上述例子中的  $r$  是中间变量.

**注** ①不是任何两个函数都可以构成复合函数.

②复合函数不仅可以有一个中间变量, 也可以有多个中间变量.

**例 9** 函数  $y=\arcsin u$  和  $u=2+x^2$  能否构成复合函数?

**解**  $y=\arcsin u$  的定义域为  $[-1, 1]$ ,  $u=2+x^2$  的值域为  $[2, +\infty)$ , 显然  $[2, +\infty) \not\subset [-1, 1]$ , 所以函数  $y=\arcsin u$  和  $u=2+x^2$  不能构成复合函数.

**例 10** 函数  $y=e^u$  和  $u=-x$  能否构成复合函数?

**解**  $y=e^u$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $u=-x$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 显然  $\mathbf{R} \subset \mathbf{R}$ , 所以  $y=e^u$  和  $u=-x$  能构成复合函数  $y=e^{-x}$ .

## 7. 初等函数

在中学里学过的常数函数  $f(x)=C$  ( $C$  为常数)、幂函数  $y=x^\mu$  ( $\mu \in \mathbf{R}$  为常数)、指数函数  $y=a^x$  ( $a>0$  且  $a \neq 1$ )、对数函数  $y=\log_a x$  ( $a>0$  且  $a \neq 1$ )、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可可用一个式子表示的函数, 称为初等函数. 例如

$$y=\sqrt{1-x^2}, y=\sin^3 x, y=\tan \frac{x}{2}, y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

等都是初等函数. 本书中所讨论的函数绝大部分都是初等函数.

## 习题 1-1

1. 设  $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ , 对每一个  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $f(x)=\sin x$  是否是一个映射? 如果是, 其定义域和值域分别是什么?

2. 求下列函数的定义域:

$$(1) f(x)=\sqrt[3]{3x+3};$$

$$(2) f(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}};$$

$$(3) f(x)=\ln(x^2-4x+3);$$

$$(4) f(x)=\sin \sqrt{x}.$$

3. 下列各题中, 函数  $f(x)$  和  $g(x)$  是否相同? 为什么?

$$(1) f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2};$$

$$(2) f(x)=x, g(x)=\sqrt[3]{x^3};$$



$$(3) f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x; \quad (4) f(x) = x - 1, g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}.$$

4. 求分段函数  $f(x) = \begin{cases} 2-x, & 1 < x < 3 \\ x^2, & |x| \leq 1 \end{cases}$  的定义域, 并计算  $f(0)$ ,  $f\left(\frac{4}{3}\right)$ ,  $f(-1)$  的值.

5. 求下列函数的反函数:

$$(1) f(x) = \sqrt[3]{x+1}; \quad (2) f(x) = \frac{5x+3}{2x+1}.$$

6. 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在区间  $(1, 2)$  内是否有界?

7. 函数  $f(x) = \cos x$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内是否有界?

8. 求函数  $f(x) = x^2 - x$  的单调区间.

9. 求函数  $f(x) = \sin x$  的单调增区间.

10. 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x) = x^2(1-x^2); \quad (2) f(x) = x \cos x;$$

$$(3) f(x) = \frac{\sin x}{x}; \quad (4) f(x) = \lg(\sqrt{1+x^2} - x).$$

11. 下列哪些函数是周期函数? 并求其最小正周期.

$$(1) y = \sin 2x; \quad (2) y = |\cos x|;$$

$$(3) y = x \cos x; \quad (4) y = \cos^2 x.$$

12. 在下列各题中, 求出由所给函数构成的复合函数, 并求该函数分别对应于给定自变量值  $x_1$  和  $x_2$  的函数值.

$$(1) y = u^2, u = \sin x, x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{3};$$

$$(2) y = e^u, u = x^2, x_1 = -1, x_2 = 0.$$

13. 写出下列函数的复合过程:

$$(1) y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}; \quad (2) y = \sin 2x;$$

$$(3) y = \ln(2x + 3); \quad (4) y = e^{2x}.$$

14. 设  $f(x)$  的定义域  $D = [0, 1]$ , 求下列函数的定义域:

$$(1) f(x^2); \quad (2) f(\sin x).$$

15. 有一块边长为  $a$  的正方形铁皮, 将它的四角剪去适当的大小相等的小正方形, 制成一个无盖盒子, 求盒子的容积  $V$  与小正方形边长  $x$  的函数关系式.

16. 华氏温度(用  $F$  表示)和摄氏温度(用  $C$  表示)的转换公式为  $F = 1.8C + 32$ , 求:

(1)  $90^\circ\text{F}$  的对应摄氏温度和  $-3^\circ\text{C}$  的对应华氏温度;

(2) 是否存在一个温度值, 使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的? 如果存在, 那么该温度值是多少?



数列极限的概念

## 第二节 数列的极限

极限是高等数学中一个最为基本的概念,极限以及极限的思维方法贯穿高等数学的始终,在微积分中,许多概念如连续、导数、定积分、无穷级数等都是通过极限来定义的,极限方法是高等数学中的一个基本方法,是区别于初等数学的主要标志.

### 一、数列的极限

**引例 1** 我国古代很早就有极限思想的萌芽,在《庄子·天下篇》中有“一尺之棰,日取其半,万世不竭.”意思是:一尺的木棍,每日截取它的一半,永远都截不完.如果把每天截取后剩余部分的长度依次记录下来,就是

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

当  $n$  无限增大时,剩余的长度就无限接近于 0,但永远不等于 0.

**引例 2** 我国魏晋(三国)时代的数学家刘徽就用圆的内接正多边形——割圆术——来近似计算圆的面积.

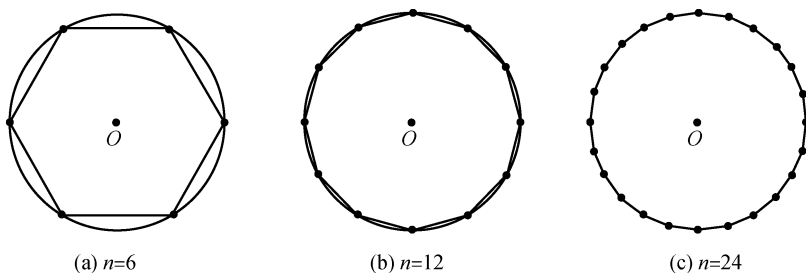


图 1-2-1

如图 1-2-1 所示,设有一圆,首先作内接正六边形,把它的面积记为  $A_1$ ;再作内接正十二边形,把它的面积记为  $A_2$ ;再作内接正二十四边形,把它的面积记为  $A_3$ ;如此下去,每次边数加倍,一般地,把内接正  $6 \times 2^{n-1}$  边形的面积记为  $A_n$ ,这样,就得到一系列内接正多边形的面积

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

当  $n$  越大时,内接正多边形的面积与圆的面积差别越小.刘徽说:“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣.”

也就是说,  $n$  无限增大时,圆内接正多边形的面积  $A_n$  就无限接近于圆的面积  $A$ .

由此可见,极限方法是在解决实际问题中逐步形成的一种基本方法.

下面先介绍数列的概念.

**定义 1** 如果按照某一法则,有第一个数  $a_1$ ,第二个数  $a_2$ , ..., 依次排列下去,使

得任何一个正整数  $n$  对应着一个确定的数  $a_n$ , 那么, 我们称这列有次序的数

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

为数列, 记为  $\{a_n\}$ . 数列中的每一个数叫作数列的项. 第  $n$  项  $a_n$  叫作数列的一般项或通项.

例如数列

$$\begin{array}{ll} (1) \left\{ \frac{1}{2^n} \right\} & \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots; \\ (2) \{2^n\} & 2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots \\ (3) \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right\} & 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \dots \\ (4) \left\{ \frac{n}{n+1} \right\} & \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \\ (5) \{(-1)^{n+1}\} & 1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots \end{array}$$

可以看到, 数列值  $a_n$  随着  $n$  变化而变化, 因此可以把数列  $\{a_n\}$  看作自变量为正整数  $n$  的函数, 即

$$a_n = f(n), \quad n \in \mathbf{N}_+.$$

另外, 从几何的角度看, 数列  $\{a_n\}$  对应着数轴上一个点列, 可看作一动点在数轴上依次取  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , 在数轴上表示为(图 1-2-2):

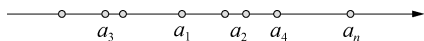


图 1-2-2

观察上面的几个数列, 可以发现, 当  $n$  无限增大时,  $a_n$  的变化趋势有区别, 一种是无限接近于某个确定的常数, 另一种是不无限接近于任何一个常数. 除数列(2)和(5)之外, 其余 3 个数列当  $n$  无限增大时, 都会接近于某个确定的常数, 这个常数就是数列的极限.

例如数列  $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ : 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{n}{n+1}$  无限接近于常数 1, 则 1 就是数列  $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$  当  $n \rightarrow \infty$  时的极限; 而数列  $\{(-1)^{n+1}\}$ : 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $(-1)^{n+1}$  在 1 和 -1 之间来回振荡, 不能无限接近于一个确定的常数, 故数列  $\{(-1)^{n+1}\}$  当  $n \rightarrow \infty$  时没有极限. 由此给出数列极限的直观定义:

**定义 2** 设  $\{a_n\}$  是一数列,  $a$  是一常数. 如果当  $n$  无限增大时(即  $n \rightarrow \infty$ ),  $a_n$  无限接近于  $a$ , 则称  $a$  为数列  $\{a_n\}$  当  $n \rightarrow \infty$  时的极限, 或称数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ 或 } a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

如果当  $n \rightarrow \infty$  时,  $a_n$  不无限接近于一个确定的常数  $a$ , 就说数列  $\{a_n\}$  没有极限或数列  $\{a_n\}$  是发散的.

上面数列(1), (3), (4)是收敛的, 可分别记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$ . 而数列(2)和(5)是发散的.



对于数列  $\{a_n\}$ , 其极限为  $a$ , 即当  $n$  无限增大时,  $a_n$  无限接近于  $a$ . 那么如何度量  $a_n$  与  $a$  无限接近呢?

我们知道, 两个数之间的接近程度可以用这两个数之差的绝对值  $|b-a|$  来度量,  $|b-a|$  越小, 表示  $a$  与  $b$  越接近.

例如数列  $\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ , 下面通过  $|a_n-0|$  来描述数列  $\{a_n\}$  的极限为 0.

由于

$$|a_n-0| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \frac{1}{n},$$

因此, 当  $n$  越来越大时,  $\frac{1}{n}$  越来越小, 从而  $a_n$  越来越接近于 0. 因为只要  $n$  足够大,

$|a_n-0|$  即  $\frac{1}{n}$  可以小于任意给定的正数, 所以说, 当  $n$  无限增大时,  $a_n$  无限接近于 0.

例如, 给定  $\frac{1}{100}$ , 要使  $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ , 只要  $n > 100$  即可. 也就是说从 101 项开始都能使不等式

$$|a_n-0| < \frac{1}{100}$$

成立.

给定  $\frac{1}{10\,000}$ , 要使  $\frac{1}{n} < \frac{1}{10\,000}$ , 只要  $n > 10\,000$  即可. 也就是说从 10 001 项开始都能使不等式

$$|a_n-0| < \frac{1}{10\,000}$$

成立.

一般地, 不论给定的正数  $\epsilon$  多么小, 总存在一个正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 不等式

$$|a_n-0| < \epsilon$$

都成立. 这就是数列  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} (n=1, 2, \dots)$  当  $n \rightarrow \infty$  时无限接近于 0 这件事的实质.

一般地, 数列极限的精确定义如下.

**定义 3** 设  $\{a_n\}$  是一数列,  $a$  是一常数. 如果对任意给定的正数  $\epsilon$ , 总存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 不等式

$$|a_n-a| < \epsilon$$

都成立, 则称  $a$  是数列  $\{a_n\}$  的极限, 或称数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ . 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

反之, 如果数列  $\{a_n\}$  的极限不存在, 则称数列  $\{a_n\}$  发散.

在上面的定义中,  $\epsilon$  可以任意给定, 不等式  $|a_n-a| < \epsilon$  表达了  $a_n$  与  $a$  无限接近程度. 此外一般情况下,  $N$  与  $\epsilon$  有关, 随着  $\epsilon$  的给定而选定.  $n > N$  表示了从  $N+1$  项开始满足不等式  $|a_n-a| < \epsilon$ .

数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  的定义可以表达为

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ . 当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

数列  $\{a_n\}$  的极限为  $a$  的几何解释:

将常数  $a$  与数列  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  在数轴上用对应的点表示出来, 从  $N+1$  项开始, 数列  $\{a_n\}$  的点都落在开区间  $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$  内, 而只有有限个(至多只有  $N$  个)在此区间以外(图 1-2-3).

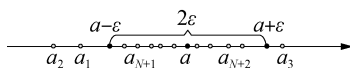


图 1-2-3

**例 1** 证明数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$ .

**证明**  $|a_n - a| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$ .

对  $\forall \varepsilon > 0$ , 要使  $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ , 只要  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , 即  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ .

这个  $\frac{1}{\varepsilon}$  是一个确定的实数, 而对于任何一个实数都有无穷多个大于它的正整数存在,

所以, 任取一个大于  $\frac{1}{\varepsilon}$  的正整数作为  $N$ , 例如取  $N = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$ , 则当  $n > N$  时, 就有

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0.$$

**例 2** 证明数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}$ .

**证明**  $|a_n - a| = \left| \frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{-1}{4n+2} \right| = \frac{1}{4n+2} < \frac{1}{4n}$ ,

对  $\forall \varepsilon > 0$ , 要使  $\left| \frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$ , 只要

$$\frac{1}{4n} < \varepsilon, \text{ 即 } n > \frac{1}{4\varepsilon}.$$

这个  $\frac{1}{4\varepsilon}$  是一个确定的实数, 大于  $\frac{1}{4\varepsilon}$  的正整数有无穷多个存在, 任取其中一个作为  $N$ ,

例如, 取  $N = \left[ \frac{1}{4\varepsilon} \right] + 1$ , 则当  $n > N$  时, 就有

$$\left| \frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}.$$

**说明** 在利用数列极限的定义来证明数列的极限时,重要的是要指出对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 正整数  $N$  确实存在, 没有必要非去寻找最小的  $N$ , 如例 1 和例 2.

**例 3** \* 证明数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ .

**证明**  $|a_n - a| = \left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| = \frac{1}{2^n}.$

对  $\forall \epsilon > 0$  (设  $\epsilon < 1$ ), 要使  $\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \epsilon$ , 只要

$$\frac{1}{2^n} < \epsilon, \text{ 即 } n > \frac{-\ln \epsilon}{\ln 2}$$

取  $N = \left\lceil \frac{-\ln \epsilon}{\ln 2} \right\rceil$ , 当  $n > N$  时, 有  $\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \epsilon$ . 由极限的定义知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$



数列极限的性质

## 二、数列极限的性质

下面三个定理都是有关收敛数列的性质.

**定理 1 (极限的唯一性)** 如果数列  $\{a_n\}$  收敛, 那么它的极限唯一.

**证明** 用反证法.

假设同时有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  及  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ , 且  $a < b$ .

取  $\epsilon = \frac{b-a}{2}$ . 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 所以存在正整数  $N_1$ , 当  $n > N_1$  时, 恒有不等式

$$|a_n - a| < \epsilon = \frac{b-a}{2} \quad (1-2-1)$$

从而

$$a_n < \frac{b+a}{2}.$$

同理, 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ , 所以存在正整数  $N_2$ , 当  $n > N_2$  时, 恒有不等式

$$|a_n - b| < \epsilon = \frac{b-a}{2} \quad (1-2-2)$$

从而

$$a_n > \frac{a+b}{2}.$$

取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则当  $n > N$  时, 式(1-2-1)和式(1-2-2)同时成立, 即  $a_n <$

$\frac{b+a}{2}$  和  $\frac{a+b}{2} < a_n$  同时成立, 这是不可能的, 故假设不成立. 从而定理得证.

**说明** 可以借助基本不等式  $|a-b| = |(a_n-b)-(a_n-a)| \leq |a_n-b| + |a_n-a| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$ , 导出矛盾.

**定理 2(收敛数列的有界性)** 如果数列  $\{a_n\}$  收敛, 那么它一定有界.

即对于收敛数列  $\{a_n\}$ , 必存在正数  $M$ , 对一切  $n \in \mathbb{N}^+$ , 有  $|a_n| \leq M$ .

**证明** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 根据数列极限的定义, 取  $\epsilon = 1$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 不等式

$$|a_n - a| < 1$$

都成立. 于是当  $n > N$  时, 有

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

取  $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |a|\}$ , 那么数列  $\{a_n\}$  中的一切  $a_n$  都满足不等式  $|a_n| \leq M$ . 这就证明了数列  $\{a_n\}$  是有界的.

定理 2 指出收敛数列一定有界, 反之, 有界数列未必收敛.

例如数列  $\{(-1)^n\}$  有界, 但是不收敛.

**定理 3(收敛数列的保号性)** 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 且  $a > 0$  (或  $a < 0$ ), 那么存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 有  $a_n > 0$  (或  $a_n < 0$ ).

**证明** 仅就  $a > 0$  的情形证明. 由数列极限的定义, 对  $\epsilon = \frac{a}{2} > 0$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 恒有

$$|a_n - a| < \frac{a}{2},$$

从而

$$a_n > \frac{a}{2} > 0.$$

**推论** 如果数列  $\{a_n\}$  从某项起有  $a_n \geq 0$  (或  $a_n \leq 0$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 那么  $a \geq 0$  (或  $a \leq 0$ ).

**证明** (略).

## 习题 1-2

1. 观察下列数列当  $n \rightarrow \infty$  时的变化趋势, 判断是否有极限, 若存在极限请指出其极限值.

$$(1) a_n = \frac{1}{3^n};$$

$$(2) a_n = (-1)^n \frac{1}{n};$$

$$(3) a_n = \frac{n-1}{n+1};$$

$$(4) a_n = (-1)^n n;$$

$$(5) a_n = \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$(6) a_n = n^2.$$

2. 数列有界是数列收敛的什么条件?

\* 3. 根据数列极限的定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

\* 4. 设数列  $\{x_n\}$  有界, 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ .



函数极限的概念

### 第三节 函数的极限

数列是特殊的函数. 由于数列  $\{a_n\}$  可以看做是自变量为  $n$  的函数:  $a_n = f(n)$ ,  $n \in \mathbf{N}_+$ . 所以数列  $\{a_n\}$  的极限为  $a$ , 可以认为是当自变量  $n$  取正整数且无限增大时, 对应的函数值  $f(n)$  无限接近于常数  $a$ . 对一般的函数  $y = f(x)$  而言, 如果在自变量的某个变化过程中, 函数值  $f(x)$  无限接近于某个确定的常数, 那么这个常数就叫作  $f(x)$  在这一变化过程的极限. 这说明函数的极限与自变量的变化趋势有关, 自变量的变化趋势不同, 函数的极限一般也会不同.

下面主要介绍自变量的两种变化趋势下函数的极限.

#### 一、自变量趋于无穷大时函数的极限

在实数范围内, 自变量趋于无穷大包括正无穷大  $(+\infty)$  和负无穷大  $(-\infty)$  两个方向, 类比数列极限, 我们先研究当自变量  $x \rightarrow +\infty$  时, 对应的函数值的变化趋势. 即自变量趋于正无穷大时函数的极限定义.

**引例** 观察函数  $y = \frac{\sin x}{x}$  当  $x \rightarrow +\infty$  时的变化趋势(图 1-3-1).

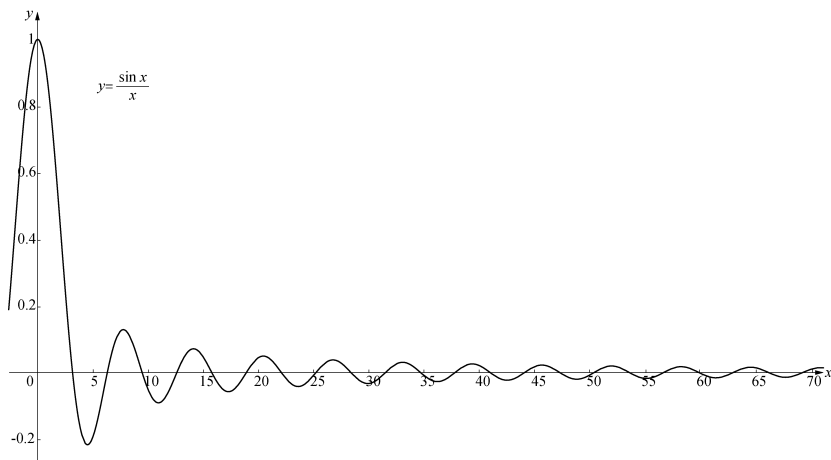


图 1-3-1



由图 1-3-1 可以看出, 当  $x$  无限增大即  $x$  趋于正无穷大时, 函数  $\frac{\sin x}{x}$  无限接近于 0.

**定义 1** 设函数  $f(x)$  当  $x$  大于某一正数时有定义. 如果存在常数  $A$ , 对于任意给定的正数  $\epsilon$  (无论它多么小), 总存在正数  $X$ , 使得当  $x$  满足不等式  $x > X$  时, 对应的函数值  $f(x)$  都满足不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

那么常数  $A$  就叫作函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow +\infty$  时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow +\infty).$$

定义 1 可以简单地表述为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \text{ 当 } x > X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \epsilon.$$

 **例 1** 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

**证明**  $\forall \epsilon > 0$ , 要证  $\exists X > 0$ , 当  $x > X$  时, 不等式

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon$$

成立. 因为这个不等式相当于

$$\frac{1}{x} < \epsilon \text{ 或 } x > \frac{1}{\epsilon}.$$

由此可知, 如果取  $X = \frac{1}{\epsilon}$ , 那么当  $x > X$  时, 不等式  $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon$  恒成立, 这就证明了

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

**定义 2** 设函数  $f(x)$  当  $x$  小于某一负数时有定义. 如果存在常数  $A$ , 对于任意给定的正数  $\epsilon$  (无论它多么小), 总存在正数  $X$ , 使得当  $x$  满足不等式  $x < -X$  时, 对应的函数值  $f(x)$  都满足不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

那么常数  $A$  就叫作函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow -\infty$  时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow -\infty).$$

**定义 3** 设函数  $f(x)$  当  $|x|$  大于某一正数时有定义. 如果存在常数  $A$ , 对于任意给定的正数  $\epsilon$  (无论它多么小), 总存在正数  $X$ , 使得当  $x$  满足不等式  $|x| > X$  时, 对应的函数值  $f(x)$  都满足不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

那么常数  $A$  就叫作函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow \infty$  时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow \infty).$$

 **例 2** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ .

**证明** 由  $|f(x)-A| = \left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|}$ , 要使  $\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| < \epsilon$ , 只要  $\frac{1}{|x|} < \epsilon$ , 即  $|x| > \frac{1}{\epsilon}$ . 因此, 对于  $\forall \epsilon > 0$ , 可取  $X = \frac{1}{\epsilon}$ , 当  $|x| > X$  时, 不等式

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| < \epsilon$$

成立.

这就证明了  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ .



函数极限的性质及四则运算

## 二、自变量趋于有限值时函数的极限

对于函数  $f(x)$ , 我们知道, 其自变量  $x$  是可以取任意实数的, 也就是说, 自变量  $x$  不仅可以趋于无穷大, 还可以趋于某个有限值  $x_0$ . 在本节, 主要研究当  $x \rightarrow x_0$  时, 函数  $f(x)$  的变化趋势. 在  $x \rightarrow x_0$  过程中, 对应的函数值  $f(x)$  无限接近于常数  $A$ , 可用

$$|f(x)-A| < \epsilon (\epsilon \text{ 是任意给定的正数})$$

来表达. 又因为函数值  $f(x)$  无限接近于  $A$  是在  $x \rightarrow x_0$  的过程中实现的. 所以, 对于  $\forall \epsilon > 0$ , 只要求充分接近于  $x_0$  的  $x$  的函数值满足不等式  $|f(x)-A| < \epsilon$ . 而充分接近于  $x_0$  的  $x$  可表述为

$$0 < |x-x_0| < \delta (\delta \text{ 是任意给定的正数})$$

由  $0 < |x-x_0| < \delta$  表示的  $x$  的集合称为  $x_0$  的去心  $\delta$  邻域.

根据上面的分析, 可给出当  $x \rightarrow x_0$  时函数极限的定义.

**定义 4** 函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某个去心邻域内有定义,  $A$  是一个常数. 若对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 总存在某一正数  $\delta$ , 使得当  $x$  满足不等式  $0 < |x-x_0| < \delta$  时, 不等式

$$|f(x)-A| < \epsilon$$

总成立, 则称  $A$  为函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0).$$

**说明** (1)  $x$  趋于  $x_0$  时函数  $f(x)$  的极限, 是指  $x$  无限接近  $x_0$  时, 函数  $f(x)$  的变化趋势, 而不是求在  $x_0$  的函数值. 因此研究  $x$  趋于  $x_0$  时函数  $f(x)$  的极限问题, 与函数  $f(x)$  在  $x_0$  处是否有定义无关.

(2) 定义中的  $\epsilon$  与数列极限定义中的  $\epsilon$  具有相同的含义.

(3)  $\delta$  不唯一, 它往往是一个很小的正数, 事实上,  $\delta$  越小越好, 因为越小意味着  $x$  与  $x_0$  越接近, 在应用中强调的是  $\delta$  的存在性.

(4) 函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限为  $A$  的几何解释如下: 对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 当  $0 < |x-x_0| < \delta$  时, 曲线  $y=f(x)$  总位于直线  $y=A-\epsilon$  和  $y=A+\epsilon$  之间. 如图 1-3-2 所示.

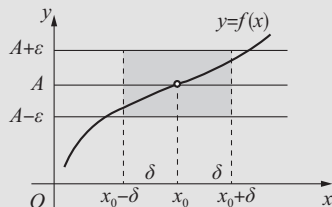


图 1-3-2

定义 4 可以简单地表述为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

**例 3** 证明  $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$ ,  $C$  为常数.

**证明** 对于任意给定的正数  $\varepsilon$ , 可以取  $\delta = 1$ . 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,

$$|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \varepsilon$$

总成立, 故由极限定义知结论成立.

事实上, 这里的  $\delta$  可以取任意正数, 都不会影响  $|C - C| = 0 < \varepsilon$  成立.

**例 4** 证明  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ .

**证明** 这里, 函数  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  在点  $x = 1$  处是没有定义的, 但是函数当  $x \rightarrow 1$  时的极限是否存在与  $f(x)$  在  $x = 1$  处有没有定义无关. 事实上, 对于任意给定的正数  $\varepsilon$ , 可以取  $\delta = \varepsilon$ . 则当  $0 < |x - 1| < \delta$  时,  $\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$  总成立, 故由极限定义知结论成立.

注意, 上面的分式是可以约分的, 即约去公因式  $x - 1$ , 因为条件  $0 < |x - 1|$  确保了  $x \neq 1$ , 即分母不为 0. 如例 3 所述, 这里的  $\delta$  可以取任意比  $\varepsilon$  小的正数, 都不会影响后面的不等式成立.

在  $x \rightarrow x_0$  时函数  $f(x)$  的极限定义中, 我们研究的是当  $x$  从  $x_0$  的左、右两侧同时趋于  $x_0$  时, 函数  $f(x)$  的变化趋势. 但有时只能或只需考虑仅从  $x_0$  的左侧趋于  $x_0$  的情形, 或从  $x_0$  的右侧趋于  $x_0$  的情形. 于是我们引入左、右极限的定义.

**定义 5 (右极限定义)** 函数  $f(x)$  在  $x_0$  的右邻域内有定义,  $A$  是一个常数. 若对于任意给定的正数  $\varepsilon$ , 总存在某一正数  $\delta$ , 使得当  $x$  满足不等式  $x_0 < x < x_0 + \delta$  时, 不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

总成立, 则称  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的右极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^+) = A$$

**定义 6 (左极限定义)** 函数  $f(x)$  在  $x_0$  的左邻域内有定义,  $A$  是一个常数. 若对于任意给定的正数  $\varepsilon$ , 总存在某一正数  $\delta$ , 使得当  $x$  满足不等式  $x_0 - \delta < x < x_0$  时, 不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

总成立, 则称  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的左极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^-) = A.$$

左极限与右极限统称为单侧极限.

根据  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时极限的定义以及左右极限的定义, 容易证明:

函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的极限存在的充要条件是左、右极限都存在并且相等, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$



## 例5 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ 1+x, & x > 0 \end{cases}$$

当  $x \rightarrow 0$  时的极限.

**解** 函数图形如图 1-3-3 所示:

$f(x)$  在  $x=0$  处的左极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0;$$

右极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x) = 1.$$

由于  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

上述解法中,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x)$ , 是因为  $x \rightarrow 0^-$  表示  $x$  从 0 的左侧趋于 0, 所以有  $x < 0$ , 而此时  $f(x) = -x$ . 类似地,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)$  成立.

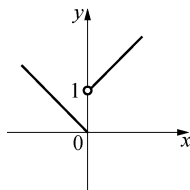


图 1-3-3

## 三、函数极限的性质

类比数列极限的性质, 可以推得函数极限的性质. 由于函数极限中自变量的变化趋势有不同的形式, 下面仅以  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  为代表讨论.

**性质 1(唯一性)** 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则其极限是唯一的.

**性质 2(局部有界性)** 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则存在常数  $M > 0$  及  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x)| \leq M$ .

**证明** 因为  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 所以取  $\epsilon = 1$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| = |(f(x) - A) + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$ . 记  $M = 1 + |A|$ , 则性质 2 就获得证明.

**性质 3(局部保号性)** 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 且  $A > 0$  (或  $A < 0$ ), 则存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ ).

**证明** 不妨设  $A > 0$ , 因为  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ , 所以取  $\epsilon = \frac{A}{2}$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - A| < \frac{A}{2} \Rightarrow f(x) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0.$$

类似地, 可以证明  $A < 0$  的情形.

## 四、极限的四则运算

利用极限的定义只能计算一些非常简单的函数的极限, 而实际问题中的函数通常较为复杂, 下面通过建立极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则, 来求比较复杂函数

的极限.

**定理(四则运算)** 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  都存在, 则有

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

特别地,  $\lim_{x \rightarrow x_0} Cg(x) = C \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  ( $C$  为常数).

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad (\text{设 } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0).$$

**证明** (1) 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 由极限定义, 任给  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta_1 > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时, 恒有  $|f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2}$ ;

又设  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 由极限定义, 任给  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta_2 > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  时,

恒有  $|g(x) - B| < \frac{\epsilon}{2}$ ;

令  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $|f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2}$  和  $|g(x) - B| < \frac{\epsilon}{2}$  都成立, 则

$$\begin{aligned} & |[f(x) \pm g(x)] - [A \pm B]| \\ &= |[f(x) - A] \pm [g(x) - B]| \\ &\leq |f(x) - A| + |g(x) - B| \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

**说明** (1) 和与积的公式(1)和(2)可以推广到任意有限个函数的情况. 特别地, 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^n, \quad (n \in \mathbf{N})$$

(2) 对于其他五种自变量的变化过程  $x \rightarrow x_0^+$ ,  $x \rightarrow x_0^-$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ , 上述运算法则同样适用.



#### 例 6

求  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2)$ .

**解**  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2)$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 2$$

$$= (\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + 2$$

$$= 2^2 - 3 \times 2 + 2$$

$$= 0.$$

 **例 7** 求  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 3}$ .

**解** 当  $x \rightarrow 3$  时, 分母的极限不为 0, 所以可直接用极限的运算法则(3), 即

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 3} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3)} \\&= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 2x + \lim_{x \rightarrow 3} 2}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 3} = \frac{(\lim_{x \rightarrow 3} x)^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 3} x + 2}{(\lim_{x \rightarrow 3} x)^2 - 3} \\&= \frac{3^2 - 2 \times 3 + 2}{3^2 - 3} = \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

 **例 8** 求  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-16}$ .

**解** 当  $x \rightarrow 4$  时, 分母的极限为 0, 所以不可直接用极限的运算法则(3).

由于分子及分母有公因子  $(x-4)$ , 而当  $x \rightarrow 4$  时,  $x-4 \neq 0$ , 所以可以约去这个不为零的公因子, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{8}.$$

 **例 9** 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$ .

**解** 当  $x \rightarrow 1$  时,  $\frac{1}{x-1}$  和  $\frac{2}{x^2-1}$  的极限都不存在, 所以不能直接用运算法则(1), 可先将函数进行恒等变形, 得  $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x+1-2}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

 **例 10** 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{x-1}$ .

**解** 当  $x \rightarrow 1$  时, 分母的极限为 0, 所以不可以直接运算运算法则(3), 但可以先分子有理化, 得到  $\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3}}$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+2} + \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

 **例 11** 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x - 5}{3x^3 - x - 4}$ .

**解** 当  $x \rightarrow \infty$  时, 分子和分母的极限都不存在, 所以不能直接用运算法则(3), 先用  $x^3$  除分子和分母, 然后再求极限, 得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x - 5}{3x^3 - x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3}}{3 - \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}} = \frac{2}{3}.$$

 **例12** 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{3x^3 - x - 4}$ .

**解** 当  $x \rightarrow \infty$  时, 分子和分母的极限都不存在, 所以不能直接用运算法则(3), 先用  $x^3$  除分子和分母, 然后再求极限, 得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{3x^3 - x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3}}{3 - \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}} = \frac{0}{3} = 0.$$

 **例13** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$

**解** 当  $n \rightarrow \infty$  时, 上式括号里是无限项之和, 不能直接用运算法则(1), 但可以由等差数列的求和公式, 先将括号里的式子变形后, 再求极限, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}.$$

### 习题 1-3

1. 根据函数极限的定义证明  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = 3$ .

2. 根据函数极限的定义证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ .

3. 讨论  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  是否存在.

4. 设  $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x+1, & x > 0. \end{cases}$  求  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

5. 设  $f(x) = \begin{cases} 2x^2+1, & x > 0, \\ x+a, & x < 0. \end{cases}$ , 求当  $a$  取何值时,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存在.

6. 求下列极限.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x + 2)$ ;

(2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-5x+6}$ ;

(3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}+2}{x+1}$ ;

(4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3x-5}{3x^3-x-4}$ ;

(5)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ ;

(6)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$ ;

(7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3x-5}{3x^3-x-4}$ ;

(8)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right)$ .

## 第四节 两个重要极限

前面学习了一些简单的数列极限和函数极限的证明与计算,但一些复杂的极限问题,常常首先要判断其极限是否存在,如果存在,再设法求其极限值.本节先介绍两个判断极限存在的准则,在此基础上,再介绍两个重要极限.

### 一、夹逼准则

先看一个生活中的例子,甲、乙、丙三人开车从上海去北京,都走京沪高速,且甲总在最前面,丙总在最后面,如果甲和丙都到了北京,那么乙肯定也到北京了.判断极限存在的夹逼准则与此类似.

**定理 1** 设  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  为三个函数,  $\delta_0 > 0$ ,  $x_0$ ,  $A$  都为实数. 如果

(1) 当  $0 < |x - x_0| < \delta_0$  时,  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ , 且

(2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$

则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A.$$

数列作为特殊的函数也有相应的夹逼准则.

**定理 1'** 设  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{z_n\}$  为三个数列,  $a$  为实数. 如果

(1) 从某一项起, 总有  $x_n \leq y_n \leq z_n$ , 且

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$

夹逼准则的严格证明我们略过. 重要的是如何用好夹逼准则.

**例 1** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = 1$ .

**分析** 本题用极限定义来证是比较困难的, 用极限性质来求也不好办. 它具有可以使用夹逼准则的数列形式. 易知准则中的  $y_n = n \left( \frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right)$ ,  $a = 1$ . 那么我们需要构造数列  $\{x_n\}$  和  $\{z_n\}$ , 它们的极限都是 1, 且满足  $x_n \leq y_n \leq z_n$ . 注意到  $y_n$  中含有  $\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi}$  表达式, 运用放缩思想, 只要每个加项的分母都放大为  $n^2 + n\pi$ , 则得到  $x_n$ , 分母都缩小为  $n^2 + \pi$ , 则得到  $z_n$ . 因此有

$$n \left( \frac{1}{n^2 + n\pi} \cdot n \right) \leq n \left( \frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) \leq n \left( \frac{1}{n^2 + \pi} \cdot n \right)$$

而前后两项的极限容易求得都是 1.

**证明** 作两个数列  $\left\{ x_n = \frac{n^2}{n^2 + n\pi} \right\}$ ,  $\left\{ z_n = \frac{n^2}{n^2 + \pi} \right\}$ . 则



$x_n = \frac{n^2}{n^2 + n\pi} = n \left( \frac{1}{n^2 + n\pi} \cdot n \right) \leq n \left( \frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) \leq n \left( \frac{1}{n^2 + \pi} \cdot n \right) = z_n$  总成立.

另一方面, 容易计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + n\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\pi}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\pi}{n} \right)} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + \pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\pi}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\pi}{n^2} \right)} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n^2}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

则由夹逼准则, 原命题成立.

**说明** 过程中的符号  $x_n, z_n$  可以不写而只写数列本身.



第一个重要极限

## 二、第一个重要极限

从图 1-4-1 看,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  这个等式是很显然的. 然而它的严格推导不是很简单.

首先在直角坐标系中作单位圆, 观察当圆心角  $x$  比较小时,  $\sin x$  和  $x$  的大小关系.

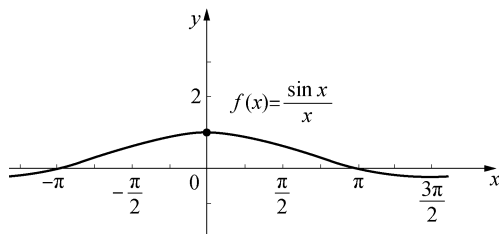


图 1-4-1

如图 1-4-2 所示, 取圆心角  $\angle AOB = x$ , 设  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,

可知

$\triangle AOB$  的面积  $<$  扇形  $AOB$  的面积  $<$   $\triangle AOD$  的面积,

即

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

整理, 得

$$\sin x < x < \tan x.$$

观察上述不等式的左边部分, 可得  $\frac{\sin x}{x} < 1$ . 而右边部分变形可得  $x < \frac{\sin x}{\cos x}$ , 即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x}.$$

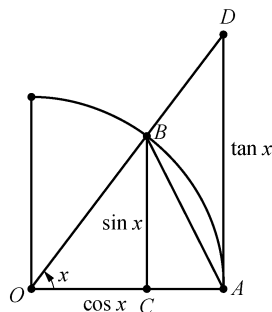


图 1-4-2

从而得到

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

注意到, 当  $x$  取值范围换成区间  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ , 不等式符号不改变.

当  $x \rightarrow 0$  时, 如果能证到  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ , 那么由夹逼准则知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

下面我们继续用夹逼准则推导  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ . 事实上, 利用三角公式易得  $0 \leq 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leq 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$ , 当  $x \rightarrow 0$  时, 右边的极限为 0, 由夹逼准则得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

**说明** 重要极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  的用途很广, 但用来求其他函数极限时, 要注意几点:

- (1) 极限是  $\frac{0}{0}$  型, 即分子和分母的极限都是 0, 极限的除法运算法则不适用;
- (2) 式中要带有三角函数此极限才适用;
- (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  中的  $x$  可以是一个函数, 即  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta}{\Delta} = 1$ , 只要三个  $\Delta$  都一致.

 **例 2** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ .

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = 1.$$

 **例 3** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ .

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

 **例 4** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

或者

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

### 三、单调有界准则

**定理 2** 单调有界数列必有极限.

我们已经知道有界数列不一定有极限, 单调数列也不一定有极限. 然而, 定理 2 告诉我们单调有界的数列必有极限.

定理的几何意义十分明显. 若数列  $\{a_n\}$  单调递增有上界, 即对任意的  $n$ , 有

$$a_n \leq a_{n+1}, \text{ 且 } a_n \leq M, M \text{ 是某一个正常数.}$$

把  $a_n$  对应到数轴上的点. 当  $n \rightarrow \infty$  时, 点  $a_n$  在数轴上向右移动. 因为有上界, 所以这些点必定无限接近于某个点  $a$ , 则  $a$  就是数列  $\{a_n\}$  的极限, 如图 1-4-3 所示.

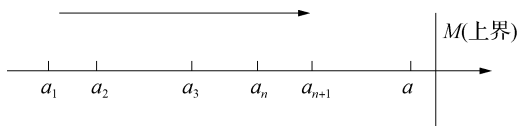


图 1-4-3

例如, 数列  $a_n = \frac{n}{n+1}$ :  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$  单调递增, 且  $a_n < 1$ , 由定理 2, 它存在极限.

事实上, 我们已证明过  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

### 四、第二个重要极限



第二个重要极限

先来看金融存贷款利率的一个例子.

复利计算在存贷款中经常会遇到. 假设本金为  $A_0$ , 年利率为  $r$ , 如果每一年结算一次, 则一年后的本金和利息之和(简称本利和)为

$$A_1 = A_0(1+r).$$

如果每半年结算 1 次, 即半年的利率为  $\frac{r}{2}$ , 每年结算 2 次, 那么一年后的本利和为

$$A_2 = A_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2.$$

类似地, 如果每年结算  $m$  次, 即每次计利息  $\frac{r}{m}$ , 那么一年后的本利和为

$$A_m = A_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

若  $r=10\%$ , 则容易由计算器得到

$$A_1 = 1.1A_0,$$

$$A_2 = 1.1025A_0,$$

$$A_3 = 1.10337A_0,$$

$$A_{12} = 1.104713A_0,$$

其中  $A_{12}$  表示每月结算一次情况下一年后的本利和. 很明显, 随着结算次数的增加, 一



年后的本利和也会明显增加. 如果结算的次数趋于无穷大, 意味着每个瞬时“立即存入, 立即结算”, 这样的复利称为连续复利. 那么连续复利下, 一年后的本利和将会是多少呢? 这即要求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n,$$

它是否存在? 若存在, 是不是会非常大?

对于存款, 利息多自然是好事; 对于贷款就恰恰相反了. 如果掌握了第二个重要极限, 则会对此有深刻的认识.

我们不妨只探讨  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , 并只做简要说明而忽略严格证明.

虽然当  $n \rightarrow \infty$  时,  $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ , 但不能判定  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 1$ . 观察表 1-4-1.

表 1-4-1

| $n$                              | 1 | 2    | 3     | 10    | 100   | 1 000 | 10 000 |
|----------------------------------|---|------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | 2 | 2.25 | 2.488 | 2.594 | 2.705 | 2.717 | 2.718  |

由表 1-4-1 看出, 随着  $n$  的增加, 数列  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$  单调递增, 并且从  $n = 100$  起,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  的前两位数字都保持不变, 可以证明它的值不会超过 3. 由单调有界数列必有极限知道, 数列  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$  的极限必定存在, 通常用字母  $e$  来表示该极限, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$e$  是一个无理数, 它约等于 2.718 281 828 459 045.  $e$  是自然对数  $\ln$  的底数, 在工业上有很大应用.

更进一步且省去证明, 当  $x$  取实数而趋向  $+\infty$  (或  $-\infty$ ) 时, 函数  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  的极限也存在, 且等于  $e$ , 如图 1-4-4 所示.

故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

这就是第二个重要极限.

令  $\frac{1}{x} = t$ , 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $t \rightarrow 0$ , 上式可变为

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

这是极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  的另一种形式.

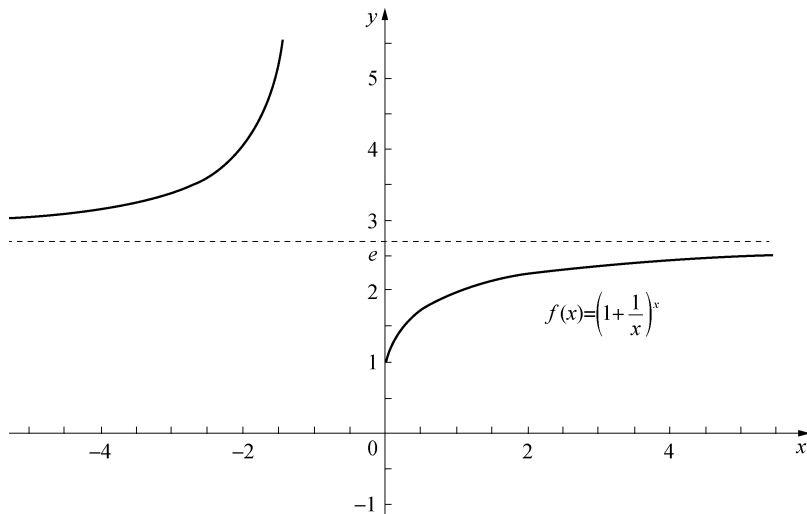


图 1-4-4

**说明** 在利用  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  求函数极限时, 要注意:

(1) 极限是  $1^\infty$  型;

(2)  $\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\Delta}\right)^\Delta = e$  和  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} (1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = e$  只要各等式中的  $\Delta$  变量一致. 而且, 若  $n \rightarrow \infty$  时  $\Delta \rightarrow \infty$ , 则有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\Delta}\right)^\Delta = e$ . 若  $n \rightarrow 0$  时  $\Delta \rightarrow 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow 0} (1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = e$ .

**例 5** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$

**解**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$

**例 6** 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ .

**解** 令  $u = \frac{x}{2}$ , 则  $x = 2u$ , 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $u \rightarrow \infty$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{2u} = \left[ \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \right]^2 = e^2.$$

熟练之后, 可以省略变量代换过程, 直接写成

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \right)^2 = e^2.$$

**例 7** 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ .

解  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^x} = e \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{-x} \right)^{-x} = e \cdot e = e^2.$

 **例 8** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (-2x)]^{\frac{1}{-2x} \cdot (-2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \{ [1 + (-2x)^{\frac{1}{-2x}}]^{-2} \} = e^{-2}.$

现在回到连续复利即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^n$  的问题. 直接计算可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{n}{r}} \right)^{\frac{n}{r} \cdot r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\frac{n}{r}} \right)^{\frac{n}{r}} \right]^r = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{n}{r}} \right)^{\frac{n}{r}} \right]^r = e^r.$$

若  $r=10\%$ ,  $A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{10\%}{n} \right)^n A_0 = e^{0.1} A_0 \approx 1.105\,17 A_0,$

但若  $r=100\%$ ,  $A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{100\%}{n} \right)^n A_0 = e^1 A_0 \approx 2.718\,28 A_0,$

$r=300\%$ ,  $A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{300\%}{n} \right)^n A_0 = e^3 A_0 \approx 20.1 A_0.$

不难看出, 在年利率较小时, 连续复利与单利(结算一次)区别不大, 但是在高利贷的情况下, 连续复利就很夸张了, 利息是呈指数增长的.

#### 习题 1-4

1. 应用夹逼准则证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right] = 0.$

2. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}.$

3. 计算下列函数的极限.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x};$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x};$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2};$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x};$

4. 计算下列函数的极限.

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{1+n} \right)^n;$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^x;$

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^{2x};$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x^2)^{\frac{1}{x^2}};$

(5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x+2};$

(6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}.$

## 第五节 无穷小与无穷大



无穷小与无穷大

我们将从另一个视角来看极限，并从中挖掘出又一个求极限的有力工具，它就是无穷小。事实上，牛顿发明的微积分当时也是建立在无穷小的基础上的。无穷小在高等数学后续内容和后继课程中都有着重要的应用。

在第二节中介绍的数列  $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ ，在  $n \rightarrow \infty$  时，其极限为 0，即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ ，我们称  $\frac{1}{2^n}$  为  $n \rightarrow \infty$  时的无穷小。

**定义 1** 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ )，则称函数  $f(x)$  为  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷小量，简称无穷小。

例如  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$ ，则  $x^2 - 1$  是  $x \rightarrow 1$  时的无穷小。

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ，则  $\frac{1}{x}$  是  $x \rightarrow \infty$  时的无穷小。

无穷小通常用希腊字母  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  等来表示。

**说明** (1) 无穷小不是很小的数，它是一个函数。在  $x$  的某种变化趋势下，它的绝对值可以任意小。

(2) 在说一个函数是无穷小时，一定要指明自变量的变化趋势。同一函数，在自变量的不同变化趋势下，极限不一定为零。由  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = 3$  可知  $x^2 - 1$  不是  $x \rightarrow 2$  时的无穷小。

(3) 零是可以作为无穷小量的唯一常数。

无穷小在微积分的逻辑体系中具有重要的理论意义，微积分中几乎所有的概念都是通过极限来定义的，而极限与无穷小有着密切的关系。

设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，即  $x \rightarrow x_0$  时，函数值无限趋近于常数  $A$ ，也就是  $f(x) - A$  无限接近于 0，即  $f(x) - A$  是  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小。反之，若  $f(x) - A$  是  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小，则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。于是有下面的定理。

**定理 1**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ ，其中  $\alpha$  是  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小。

这样，函数极限的问题可转化为无穷小问题讨论。

**说明** 定理对于其他五种自变量的变化过程同样适用。

我们再来看看无穷小的其他性质。

**性质 1** 有限个无穷小的和与差都是无穷小.

**性质 2** 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

**推论 1** 常数与无穷小的乘积是无穷小.

**推论 2** 有限个无穷小的乘积是无穷小.

性质 1 与 2 很容易由极限的运算性质推导得到.

 **例 1** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ .

**解** 由于  $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ , 是有界函数, 而  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ . 由性质 2 得  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ .

两个无穷小的和、差与积都是无穷小, 那么两个无穷小的商还是无穷小吗? 显然不是, 第一个重要极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  做出了回答. 无穷小的商涉及无穷小的比较.

无穷小是以 0 为极限的变量, 但收敛于 0 的速度是有快有慢的. 例如三个无穷小  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ , 当  $x \rightarrow 0$  时, 收敛于 0 的速度就不一样. 直观地看, 第一个收敛的速度最慢而第三个最快. 那么到底什么叫快? 快到什么程度呢? 下面给出定量的定义.

**定义 2** 在  $x \rightarrow x_0$  时,  $\alpha(x)$  和  $\beta(x)$  为无穷小,

(1) 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ , 则称  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的高阶无穷小, 记作  $\alpha(x) = o(\beta(x))$ , 也称  $\beta(x)$  是  $\alpha(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的低阶无穷小;

(2) 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C (C \neq 0)$ , 则称  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  为在  $x \rightarrow x_0$  时的同阶无穷小;

(3) 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , 则称  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  为在  $x \rightarrow x_0$  时的等价无穷小, 记作  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ .

显然, 等价无穷小是同阶无穷小的特殊情形, 即  $C = 1$ .

在上面的例子中,

由于  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$ , 说明当  $x \rightarrow 0$  时,  $x^2$  是  $x$  的高阶无穷小, 记作  $x^2 = o(x) (x \rightarrow 0)$ ,  $x$  是  $x^2$  的低阶无穷小;

此外  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x}{x} = 3$ , 说明当  $x \rightarrow 0$  时,  $3 \sin x$  是  $x$  的同阶无穷小, 而  $\sin x$  是  $x$  的等价无穷小.

在此, 我们列举出当  $x \rightarrow 0$  时, 常见的等价无穷小有

$$\sin x \sim x \sim \tan x; 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2; e^x - 1 \sim x; \ln(1+x) \sim x; \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x.$$

在上述几个无穷小的概念中, 应用最广的是等价无穷小, 它可以求函数的极限:



**定理 2** 设当  $x \rightarrow x_0$  时,  $f(x) \sim f_1(x)$ ,  $g(x) \sim g_1(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$  存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

**证明**  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f}{f_1} \cdot \frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{g_1}{g} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{f_1} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1}{g_1} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_1}{g} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1}{g_1}.$

定理 2 表明, 在求两个无穷小之比的极限时, 分子和分母都可用等价无穷小来代替, 这样, 常常可以简化计算.

 **例 2** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}.$

**解** 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin 3x \sim 3x$ ,  $\sin 2x \sim 2x$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

 **例 3** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}.$

**解** 当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ,  $x \sin x \sim x \cdot x$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

 **例 4** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$

**解** 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\tan x \sim x$ ,  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (1 - \cos x)}{x^3} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

**说明** 因式中可以用等价无穷小替换, 而和式中每一项不可以用其等价无穷小替换. 例 4 中若一开始  $\tan x$ ,  $\sin x$  将均替换成  $x$ , 则得到如下错误解法:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

在实际问题中, 经常会出现当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时, 对应的函数值的绝对值  $|f(x)|$  无限增大的情况, 这时, 我们就说函数当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时为无穷大. 例如函数  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 当  $x \rightarrow 0$  时为无穷大; 函数  $f(x) = 2^x$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时为无穷大.

**定义 3** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某个去心邻域  $\dot{U}(x_0)$  内有定义, 如果对于任意给定

的  $M>0$ , 总存在  $\delta>0$ , 当  $0<|x-x_0|<\delta$  时, 恒有  $|f(x)|>M$ , 则称函数  $f(x)$  是当  $x\rightarrow x_0$  时的无穷大量, 简称无穷大, 记为  $\lim_{x\rightarrow x_0} f(x)=\infty$ .

按通常意义, 此时极限是不存在的, 但为了表达函数的这一性态, 我们也说“函数的极限是无穷大”.

同样可以定义

$$\lim_{x\rightarrow x_0} f(x)=+\infty, \lim_{x\rightarrow x_0} f(x)=-\infty, \lim_{x\rightarrow\infty} f(x)=\infty, \lim_{x\rightarrow\infty} f(x)=+\infty, \lim_{x\rightarrow\infty} f(x)=-\infty.$$

 **例 5** 证明  $\lim_{x\rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$ .

**证明** 设任意给定  $M>0$ , 要使  $\left|\frac{1}{x-1}\right|>M$ , 只要  $|x-1|<\frac{1}{M}$ , 取  $\delta=\frac{1}{M}$ , 则对于满足不等式  $0<|x-1|<\delta$  的一切  $x$ , 恒有

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M,$$

根据定义, 证得  $\lim_{x\rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$ .

先看一个例子, 函数  $x$  是  $x\rightarrow 0$  时的无穷小, 而它的倒数  $\frac{1}{x}$  则是  $x\rightarrow 0$  时的无穷大, 这个关系并非偶然, 事实上, 无穷大与无穷小有如下的重要关系.

**定理 3** 在自变量的同一变化过程中, 如果  $f(x)$  是无穷大, 则  $\frac{1}{f(x)}$  是无穷小; 反之, 如果  $f(x)$  是无穷小, 且  $f(x)\neq 0$ , 则  $\frac{1}{f(x)}$  是无穷大.

这个结论是十分直观的, 证明从略.

### 习题 1-5

1. 下列各式中, 哪些函数是无穷小? 哪些函数是无穷大?

(1)  $f(x)=\frac{1+x}{x^2} (x\rightarrow\infty)$ ;

(2)  $f(x)=\sin \frac{1}{x} (x\rightarrow\infty)$ ;

(3)  $f(x)=3^x-1 (x\rightarrow 0)$ ;

(4)  $f(x)=3^x-1 (x\rightarrow +\infty)$ ;

(5)  $f(x)=\frac{1+x}{x^2-4} (x\rightarrow 2)$ ;

(6)  $f(x)=\ln x (x\rightarrow 0^+)$ .

2. 设  $x\rightarrow 0$ , 证明:

(1)  $x \sin x \sim x^2$ ;

(2)  $x^4+x^2=o(x)$ .

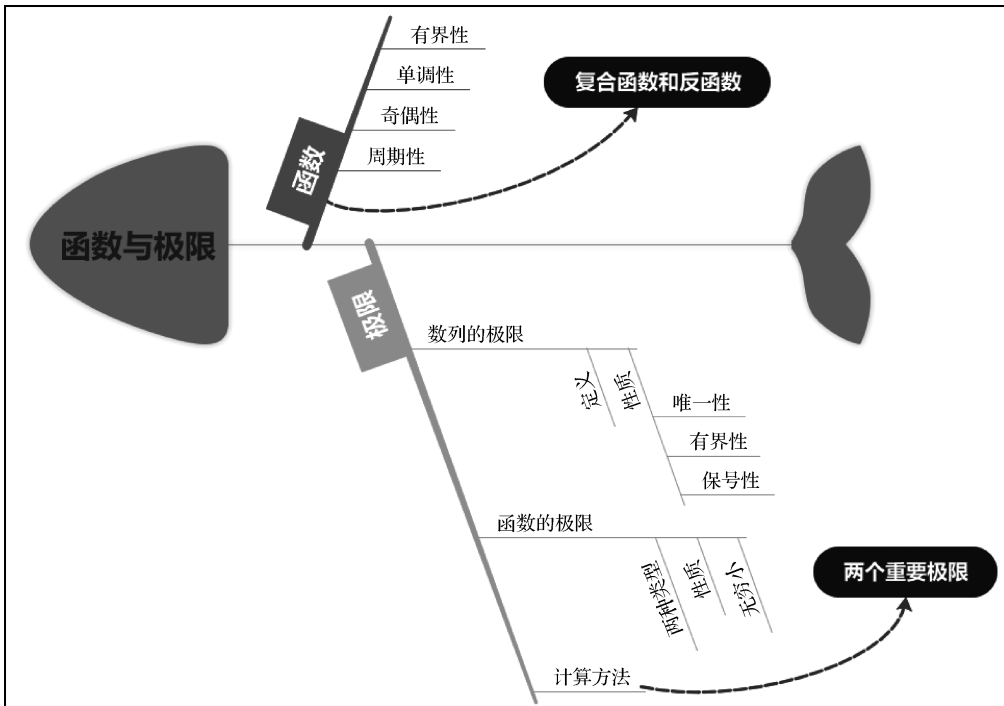
3. 利用等价无穷小代换法求下列函数的极限.

(1)  $\lim_{x\rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$ ;

(2)  $\lim_{x\rightarrow\infty} x \sin \frac{1}{x}$ ;

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2x}.$$

结



## 总习题一

### 一、单选题

1. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有定义，下列函数中必为奇函数的是( )。
- A.  $y = -|f(x)|$
- B.  $y = x^3 f(x^4)$
- C.  $y = -f(-x)$
- D.  $y = f(x) + f(-x)$
2. 下列函数中定义域为  $[-1, 1]$  的是( )
- A.  $f(x) = \ln(1-x^2)$
- B.  $f(x) = e^{\cos x}$
- C.  $f(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$
- D.  $f(x) = \arcsin x + \sqrt{2-x^2}$
3. 当  $x \rightarrow \infty$  时，下列函数中是无穷大的为( )
- A.  $y = 1-x^2$
- B.  $y = \ln x$
- C.  $y = \frac{-2x+1}{x-1}$
- D.  $y = \cos x$



4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ , 则下列式子成立的是( )

A.  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + g(x)] = \infty$

B.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x) + g(x)} = 0$

C.  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$

D.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0$

5. 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+a)x^2 + bx + 2}{1-x} = 2$ , 则有( ).

A.  $a = 1, b = 2$

B.  $a = -1, b = 2$

C.  $a = -1, b = -2$

D.  $a = 1, b = -2$

## 二、填空题

1. 若  $f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \frac{1}{x^2} + 1$ , 则  $f(x) =$ \_\_\_\_\_.

2. 如果  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{3x} = \frac{2}{3}$ , 则  $m =$ \_\_\_\_\_.

3. 若  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + k}{x - 3} = 4$ , 则常数  $k =$ \_\_\_\_\_.

4. 若当  $x \rightarrow 0$  时,  $\cos x - 1$  与  $\ln(1 + kx^2)$  为等价无穷小, 则常数  $k =$ \_\_\_\_\_.

5. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x} = 3$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{3x}\right) =$ \_\_\_\_\_.

## 三、计算题

1. 求下列函数的定义域.

(1)  $f(x) = \frac{1}{x-3} + \sqrt{x-2}$ ;

(2)  $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$ .

2. 下列函数是否相同, 为什么?

(1)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ,  $g(x) = 1$ ;

(2)  $f(x) = 1$ ,  $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ .

3. 求下列函数的反函数.

(1)  $f(x) = \ln x$ ;

(2)  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1)  $f(x) = e^x + e^{-x}$ ;

(2)  $f(x) = x^3 \cdot \sin x$ .

5. 写出下列函数的复合过程.

(1)  $y = \sin^2 x$ ;

(2)  $y = \sin x^2$ ;

(3)  $y = \lg^2 x$ ;

(4)  $y = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ .

6. 观察下列数列的变化趋势, 判断是否有极限; 若存在极限, 请指出其极限.

(1)  $a_n = \frac{2n}{n+1}$ ;

(2)  $a_n = \sin \frac{n}{2} \pi$ .

7. 求下列函数的极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x-3}.$$

8. 求下列函数的极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{x} \right)^{3x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^{2x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}.$$

9. 利用等价无穷小代换法求下列函数的极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{\sin 2x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{\sin^3 x}.$$

10. 设  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 3$ , 求  $a$  和  $b$  的值.

11. 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+c}{x-c} \right)^x = 4$ , 求  $c$  的值.

## 第二章

# 品味生活气息 体悟严谨细致——函数的连续性

### 课程思政元素

徐特立是19世纪著名的数学家，他对函数连续性做出了重要贡献。在他的研究中，提出了著名的徐特立积分(Riemann integral)，这一概念为后来对函数连续性和积分的理论发展提供了重要基础。



徐特立



魏尔斯特拉斯



卡尔·弗里德里希·高斯

魏尔斯特拉斯(Weierstrass)证明了连续函数的存在性，并提出了魏尔斯特拉斯函数，为函数连续性的研究做出了重要贡献。他的最有名的例子之一就是造出了一个处处连续而又无处可微的函数，就是级数：

$$f(x) = \sum b^n \cos(a^n x).$$

卡尔·弗里德里希·高斯(Carl Friedrich Gauss)是一位著名的数学家，他对函数的连续性做出了重要的贡献。高斯研究了函数的连续性和微分性质，并提出了一些重要的定理和概念，如高斯定理和高斯分布。他的工作对现代数学和科学领域产生了深远的影响。

数学是一种对抽象的思考，是一种对形式的思考。

——徐特立

连续性是数学的灵魂。

——魏尔斯特拉斯

连续性是数学最重要的概念之一.

——卡尔·弗里德里希·高斯



函数连续性定义

## 第一节 函数的连续性

在自然界中,有许多现象都是连续变化的,如图 2-1-1 所示,气温的变化、河水的流动、植物的生长等.这些现象在函数关系上的反映,就是函数的连续性.简单地说,如果一个函数的图像可以一笔画出来,整个过程不用抬笔,我们就可以说这个函数是连续的.



图 2-1-1

我们如何用数学表达式来刻画函数的连续性呢?

先来看一个概念——增量.

设变量  $u$  从它的一个值  $u_1$  变到另一个值  $u_2$ , 其差  $u_2 - u_1$  称作变量  $u$  的增量, 记作  $\Delta u$ , 即  $\Delta u = u_2 - u_1$ .

例如, 一天中某段时间  $[t_1, t_2]$ , 温度从  $T_1$  到  $T_2$ , 则温度的增量  $\Delta T = T_2 - T_1$ . 当温度升高时,  $\Delta T > 0$ ; 当温度降低时,  $\Delta T < 0$ ; 当时间的改变量  $\Delta t = t_2 - t_1$  很微小时, 温度的变化  $\Delta T$  也会很小; 当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,  $\Delta T \rightarrow 0$ .

对于函数  $y = f(x)$ , 如图 2-1-2 所示, 若函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某一邻域内有定义, 在定义区间内自变量从  $x_0$  变到  $x$ , 对应的函数值由  $f(x_0)$  变化到  $f(x)$ , 则称  $x - x_0$  为自变量的增量, 记作  $\Delta x$ , 即

$$\Delta x = x - x_0 \text{ 或 } x = x_0 + \Delta x.$$

$f(x) - f(x_0)$  为函数的增量, 记作  $\Delta y$ , 即

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \text{ 或 } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

如图 2-1-3 所示, 观察  $y = f(x) = x^2$  在点  $x_0 = 1$  附近的变化, 从图像上来看, 不论是  $x$  从 1 的左边趋向于 1 还是从 1 的右边趋向于 1, 对应的函数值都会趋向于  $f(1)$ .

仔细分析这个过程, 设  $f(x) = x^2$ ,  $x_0 = 1$ , 于是

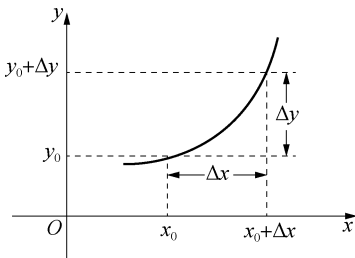


图 2-1-2

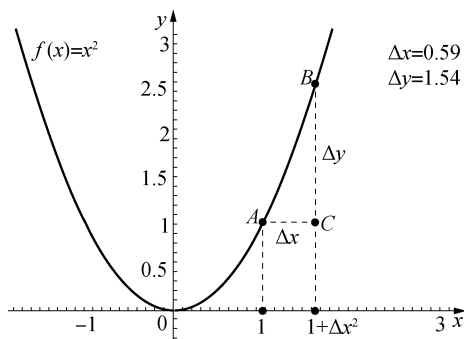


图 2-1-3

$$y_0 = f(x_0) = 1^2 = 1.$$

如果取  $\Delta x = \frac{1}{2}$ , 则  $x_0 + \Delta x = \frac{3}{2}$ ,  $f(x_0 + \Delta x) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

所以得

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$

如果取  $\Delta x = \frac{1}{4}$ , 可得

$$\Delta y = f\left(1 + \frac{1}{4}\right) - f(1) = f\left(\frac{5}{4}\right) - f(1) = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1 = \frac{9}{16}$$

如果取  $\Delta x = \frac{1}{8}$ , 可得

$$\Delta y = f\left(1 + \frac{1}{8}\right) - f(1) = f\left(\frac{9}{8}\right) - f(1) = \left(\frac{9}{8}\right)^2 - 1 = \frac{17}{64}$$

...

假定  $x_0 = 1$  不变, 让  $\Delta x$  变动, 则  $\Delta y$  也随之变化. 从上述数据看出, 如果当  $\Delta x$  无限趋向于 0 时,  $\Delta y$  也无限趋向于 0.

根据这一特点, 给出函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处连续的概念.

**定义 1** 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0, \quad (2-1-1)$$

则称函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处连续.

若取  $x = x_0 + \Delta x$ , 则当  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 有  $x \rightarrow x_0$ . 而

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0),$$

由  $\Delta y \rightarrow 0$  就是  $f(x) \rightarrow f(x_0)$ , 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

定义 1 也可以改写为如下定义:



**定义 2** 设函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (2-1-2)$$

那么就称函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处连续.

由于函数  $f(x)$  在  $x_0$  处极限存在等价于  $f(x)$  在  $x_0$  处左、右极限都存在并且相等, 结合这一特点, 下面定义左、右连续的概念.

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ , 则称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处左连续.

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ , 则称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处右连续.

如果函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 必有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

这说明了函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 既包含了  $f(x)$  在点  $x_0$  处左连续, 又包含了  $f(x)$  在点  $x_0$  处右连续.

函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处连续的充要条件是函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处既左连续又右连续.

**例 1** 证明函数  $y=f(x)=x^3$  在点  $x_0=1$  连续.

**证明** 对任意的  $\Delta x \neq 0$ , 有

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\ &= (1 + \Delta x)^3 - 1^3 \\ &= 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0), \end{aligned}$$

因为,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$

所以, 由连续的定义知  $f(x)=x^3$  在点  $x_0=1$  连续.

下面改用定义 2 来证明. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1, \quad f(1) = 1^3 = 1,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1).$$

根据定义 2, 函数  $f(x)=x^3$  在点  $x_0=1$  连续.

**例 2** 证明函数  $y=\sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是连续的.

**证明** 任取  $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ , 则

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 \\ &= 2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}. \end{aligned}$$

由于

$$\left| \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \right| \leq 1,$$

又  $\Delta x \rightarrow 0$ , 有

$$\left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \leq \left| \frac{\Delta x}{2} \right|.$$

所以

$$|\Delta y| \leq 2 \times 1 \times \left| \frac{\Delta x}{2} \right| = |\Delta x|$$

因此, 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $|\Delta y| \rightarrow 0$ , 即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

所以  $y = \sin x$  在  $x_0$  处连续. 而  $x_0$  是在  $(-\infty, +\infty)$  内任取的, 故  $y = \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是连续的.

类似地, 可以证明余弦函数  $y = \cos x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是连续的.

**例 3** 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处的连续性.

**解** 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

而  $f(0) = 0$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$$

由连续性的定义 2 可知, 函数  $f(x)$  在  $x=0$  处连续.

如果函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内每一点都连续, 则称  $f(x)$  为  $(a, b)$  内的连续函数.

如果函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续, 且在左端点  $x=a$  处右连续, 在右端点  $x=b$  处左连续, 则称  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续.

## 二、函数的间断点

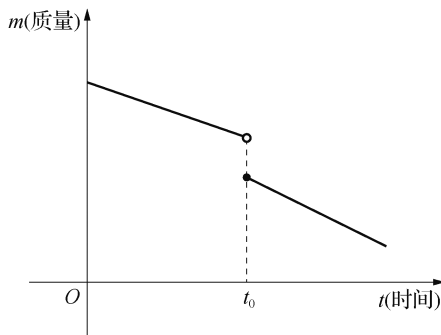
函数的连续性是函数的重要特征之一, 从几何图形上看就是函数的图像没有断开来. 实际生活中, 连续与间断正是客观事物变化中渐变与突变的一种反映. 例如火箭在发射过程中, 随着燃料的燃烧, 质量逐渐减少, 而当每一级火箭的外壳自行脱落时, 质量则突然减少. 如图 2-1-4(a) 所示.



函数的间断点



(a)



(b)

图 2-1-4

图 2-1-4(b)就是反映质量在这一变化过程中的示意图. 该图形象地描绘了火箭发射过程中, 质量从渐变到突变的情况,  $t_0$  时刻对应的是一个间断点.

**定义 3** 若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处不满足连续的条件, 则称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处间断(或不连续), 并称点  $x_0$  为  $f(x)$  的间断点.

函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 必须同时满足下列三个条件:

- (1) 函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处有定义;
- (2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 即  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ;
- (3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

这三个条件缺一不可. 换句话说, 只要其中一个条件不满足, 函数  $f(x)$  就在  $x_0$  处间断.

**例 4** 讨论函数  $f(x) = \frac{1}{|x|}$  在  $x=0$  处的连续性.

**解** 函数  $f(x) = \frac{1}{|x|}$  在  $x=0$  处无定义, 所以  $x=0$  是  $f(x) = \frac{1}{|x|}$  的间断点, 如图 2-1-5 所示.

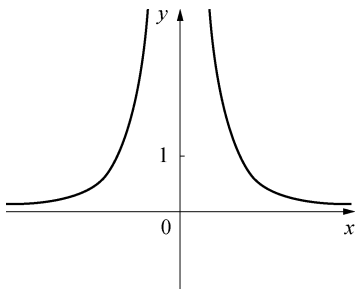


图 2-1-5

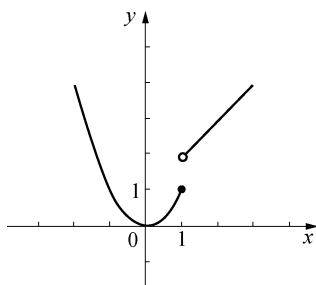


图 2-1-6

**例 5** 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$  在  $x=1$  处的连续性.

**解** 由于  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 = f(1)$ , 所以  $f(x)$  在  $x=1$  处左连续.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 \neq f(1)$ , 所以  $f(x)$  在  $x=1$  处不右连续.

因此可知, 函数  $f(x)$  在  $x=1$  处不连续,  $x=1$  是函数的间断点, 如图 2-1-6 所示.

**例 6** 讨论符号函数  $f(x) = \text{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处的连续性.

**解** 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

故  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在, 因此  $x=0$  是此函数的间断点, 如图 2-1-7 所示.

**例 7** 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$  在  $x=2$  处的连续性.

**解** 由于  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3$ , 而  $f(2) = 1$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ ,  $x=2$  是此函数的间断点, 如图 2-1-8 所示.

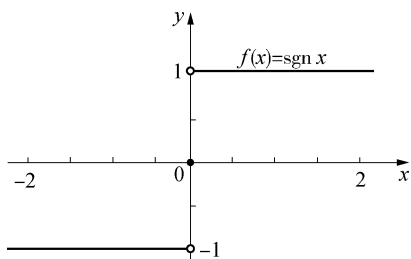


图 2-1-7

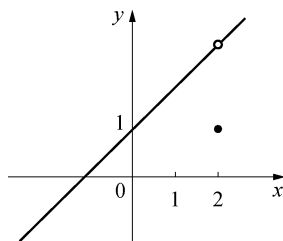


图 2-1-8

**例 8** 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处的连续性.

**解** 函数  $f(x)$  在  $x=0$  处有定义, 但当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin \frac{1}{x}$  在  $-1$  和  $1$  之间来回无穷次振荡, 所以  $x=0$  是  $f(x)$  的间断点, 如图 2-1-9 所示.

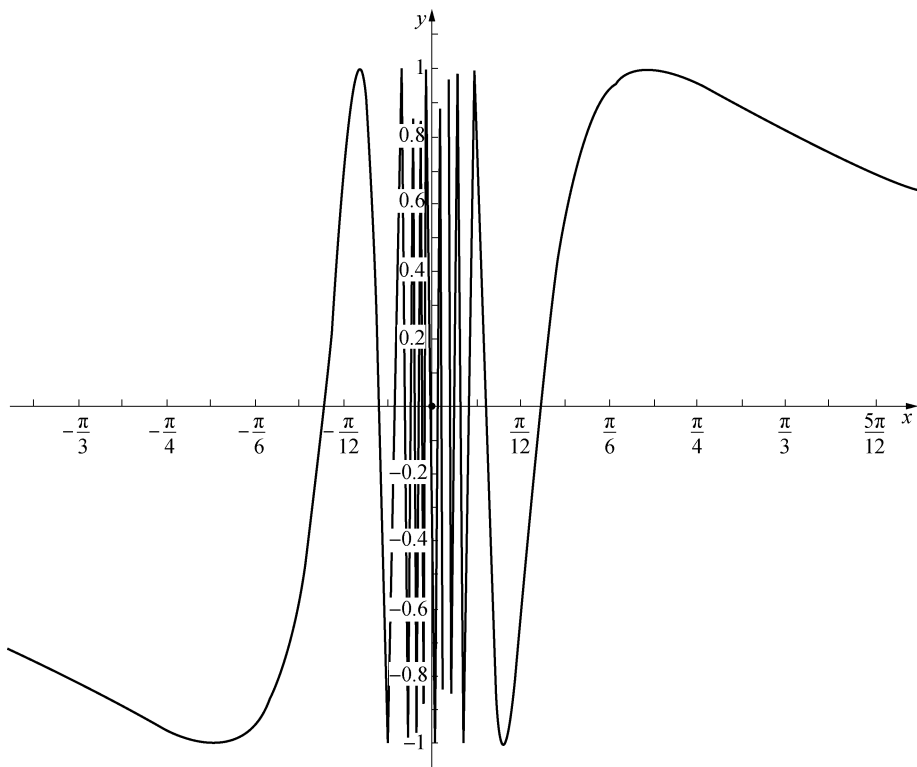


图 2-1-9

从上面的例子看出, 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处虽然都是间断的, 但产生间断的原因各不相同. 通常有如下三种情形:

- (1) 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处没有定义;
- (2) 虽然函数  $f(x)$  在  $x_0$  处有定义, 但  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在;
- (3) 虽然函数  $f(x)$  在  $x_0$  处有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 但  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ .

根据这一特点, 对间断点进行如下分类:

如果  $f(x_0^-)$  与  $f(x_0^+)$  都存在, 则称  $x_0$  为  $f(x)$  的**第一类间断点**, 否则称为**第二类间断点**.

在第一类间断点中, 如果  $f(x_0^-) = f(x_0^+)$ , 则称  $x_0$  为  $f(x)$  的**可去间断点**; 如果  $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$ , 则称  $x_0$  为  $f(x)$  的**跳跃间断点**.

在上面的例子中, 例 5 中  $x=1$  和例 6 中  $x=0$  是跳跃间断点, 例 7 中  $x=2$  是可去间断点.

在第二类间断点中, 如果  $f(x_0^-)$  与  $f(x_0^+)$  至少有一个为  $\infty$ , 则称  $x_0$  为  $f(x)$  的**无穷间断点**, 例 4 中  $x=0$  为无穷间断点; 如果  $f(x_0^-)$  与  $f(x_0^+)$  至少有一个是不断振荡的, 则称  $x_0$  为  $f(x)$  的**振荡间断点**, 例 8 中的  $x=0$  是振荡间断点.

## 习题 2-1

1. 设函数  $f(x) = x^2 - 2x$ , 分别求适合下列条件的自变量改变量和函数改变量.

- (1)  $x$  由 1 变化到 2;
- (2)  $x$  由 1 变化到 1.1;
- (3)  $x$  由 1 变化到  $1 + \Delta x$ .

2. 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处的连续性.

3. 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处的连续性.

4. 讨论函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $x=0$  处间断点的类型.

5. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ , 讨论函数在  $x=0$  处间断点的类型.

6. 求函数  $f(x) = \frac{x^2-1}{x(x+1)}$  的间断点, 并指出其连续区间和间断点的类型.

## 第二节 连续函数的运算法则



连续函数的运算法则及最值定理

### 一、运算法则

根据函数在某一点连续的定义和极限的四则运算法则, 得到如下的定理.

**定理 1** 若函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在点  $x_0$  连续, 则它们的和、差、积、商(分母不为零)在点  $x_0$  也连续.

**证明** 以积为例加以证明, 其他情况的证明类似.

因为函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在点  $x_0$  连续, 所以

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

由极限运算法则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0)g(x_0),$$

即  $f(x)g(x)$  在点  $x_0$  连续.

例如, 已知  $\sin x$  和  $\cos x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 则由定理 1 可知, 它们的商正切函数  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  在其定义域内也是连续的.

再如, 多项式函数

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 则分式函数

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m}$$

在分母不为 0 的点处都连续.

可以证明, 基本初等函数(幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数)在其定义域内都是连续函数.

**定理 2** 设函数  $y = f[\varphi(x)]$  是由  $y = f(u)$  和  $u = \varphi(x)$  复合而成的, 若函数  $y = f(u)$  在点  $u_0$  处连续, 函数  $u = \varphi(x)$  在点  $x_0$  处连续, 且  $u_0 = \varphi(x_0)$ , 则复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  在点  $x_0$  处连续.

**证明** 因为函数  $u = \varphi(x)$  在点  $x_0$  处连续, 所以

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$$

又函数  $y = f(u)$  在点  $u_0$  处连续, 有

$$\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$$

又  $u_0 = \varphi(x_0)$ , 所以

$$\lim_{u \rightarrow \varphi(x_0)} f(u) = f[\varphi(x_0)]$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \rightarrow \varphi(x_0)} f(u) = f[\varphi(x_0)]$$

即复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  在点  $x_0$  处连续.

 **例 1** 求  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin 2x$ .

**解** 由于  $y = \sin 2x$  可以看作函数  $y = \sin u$  与  $u = 2x$  的复合, 而函数  $y = \sin u$  与  $u = 2x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内都是连续函数, 所以复合函数在  $(-\infty, +\infty)$  内也是连续函数, 所以有

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin 2x = \sin \left( 2 \times \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**初等函数** (由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和复合运算得到的函数称为初等函数) 在其定义域内都是连续的. 即如果  $f(x)$  是初等函数, 且  $x_0$  是  $f(x)$  的定义区间内的点, 则有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . 这个结论为求一些复杂函数的极限提供了一种很好的方法.

## 二、闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数有一些重要的性质, 由于其证明超出了我们学习的范围, 所以这里不予证明, 在后续的学习中可以直接应用. 先引入最大值与最小值的概念.

**定义 1** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 若存在一点  $x_1 \in D$ , 使得对一切  $x \in D$ , 都有  $f(x) \geq f(x_1)$ , 那么称  $f(x_1)$  为  $f(x)$  在  $D$  上的**最小值**, 点  $x_1$  为  $f(x)$  的最小值点.

**定义 2** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 若存在一点  $x_1 \in D$ , 使得对一切  $x \in D$ , 都有  $f(x) \leq f(x_1)$ , 那么称  $f(x_1)$  为  $f(x)$  在  $D$  上的**最大值**, 点  $x_1$  为  $f(x)$  的最大值点.

**例如** 函数  $f(x) = \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的最大值为 1, 最小值为 -1; 函数  $f(x) = x^2$  在  $[-1, 1]$  上的最大值为 1, 最小值为 0. 但是, 并不是每一个函数在其定义域内都有最大值和最小值. 例如, 函数  $f(x) = x^2$  在  $[0, 1)$  上取不到最大值, 又如  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  上既取不到最大值, 也取不到最小值, 这是因为函数在  $x=0$  处不连续, 在  $x=1$  处为开区间, 如图 2-2-1 所示.

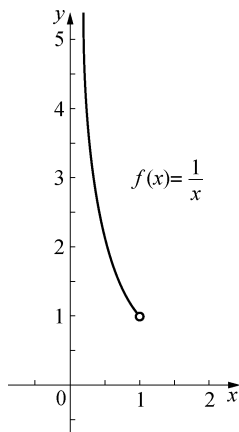


图 2-2-1

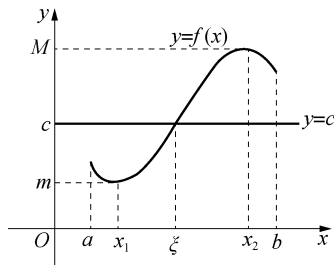


图 2-2-2

**定理 3(最值定理)** 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上必有最大值和最小值.

此定理说明, 如果函数  $f(x) \in C[a, b]$  (图 2-2-2), 则至少存在一点  $\xi_1 \in [a, b]$ ,  $f(\xi_1) = M$ , 对  $\forall x \in [a, b]$ , 都有  $f(x) \leq M$ ,  $M$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值. 至少存在一点  $\xi_2 \in [a, b]$ ,  $f(\xi_2) = m$ , 对  $\forall x \in [a, b]$ , 都有  $f(x) \geq m$ ,  $m$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$

上的最小值.

**说明** 最值定理中条件“闭区间”和“连续”很重要, 如果缺少一个, 定理不一定成立.

由于闭区间上连续函数存在最大值和最小值, 因此闭区间上连续函数必定有界. 定理 3 反映了现实世界中连续变化量的规律. 例如一天中的温度变化, 总有两个时刻分别达到最高温度和最低温度; 又如小球做斜抛运动, 必能达到最高点和最低点.

从几何直观上看, 一段连续曲线上, 除了能取得最大值和最小值外, 还能取得介于最大值  $M$  和最小值  $m$  之间的任何一个数  $c$ , 即连续曲线  $y=f(x)$  与直线  $y=c$  至少有一个交点.

**定理 4(介值定理)** 如果函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 那么  $f(x)$  取到它的最大值  $M$  与最小值  $m$  之间的一切值, 即对介于  $M$  与  $m$  之间的任一实数  $c (m < c < M)$ , 至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(\xi) = c.$$

如果函数  $y=f(x)$  不连续, 比如  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上有一个间断点(图 2-2-3), 则直线  $y=c$  就不一定与  $y=f(x)$  的图像相交了.

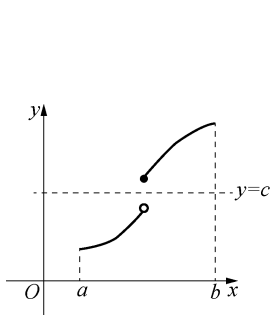


图 2-2-3

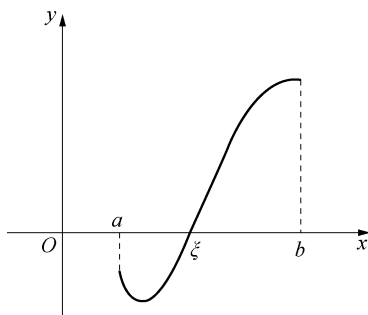


图 2-2-4

从几何上看, 当最大值与最小值异号时, 连续曲线  $y=f(x)$  与  $x$  轴至少相交于一点. 一般地, 有如下结论.

**定理 5(零点定理)** 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 则在开区间  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = 0$  (图 2-2-4).

结论表明, 如果方程  $f(x) = 0$  中的函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且在两个端点处的函数值异号, 则该方程在开区间  $(a, b)$  内至少存在一个根  $\xi$ , 这个结论在确定一个方程的根时非常有用.



零点定理

**例 2** 证明方程  $f(x) = x^5 - 2x^2 - 1$  在区间  $(1, 2)$  内至少有一个根.

**解** 设  $f(x) = x^5 - 2x^2 - 1$ , 显然  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上连续, 而

$$f(1) = -2 < 0, f(2) = 23 > 0,$$

由零点定理知, 至少存在一点  $\xi \in (1, 2)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ . 即  $x^5 - 2x^2 - 1 = 0$  在区间  $(1, 2)$  内至少有一个根  $\xi$ .



**例 3**

设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) < a$ ,  $f(b) > b$ , 证明至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = \xi$ .

**解** 设  $\varphi(x) = f(x) - x$ , 显然  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 而

$$\varphi(a) = f(a) - a < 0, \quad \varphi(b) = f(b) - b > 0,$$

由零点定理知, 至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $\varphi(\xi) = 0$ . 即  $f(\xi) = \xi$ .

**说明** 在应用零点定理时, 一定要注意检验函数是否满足定理使用的条件.

### 三、利用函数连续性求函数极限

若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**例 4**

求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\cos x}$ .

**解**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\cos x} = \frac{\ln(0+1)}{\cos 0} = 0.$

**例 5**

求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \sin x}{\arcsin(x^2+1)}$ .

**解**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \sin x}{\arcsin(x^2+1)} = \frac{e^0 \cdot \sin 0}{\arcsin(0^2+1)} = \frac{1 \times 0}{\frac{\pi}{2}} = 0.$

### 习题 2-2

1. 判断下列命题是否正确. 若命题不正确, 请举例说明.

(1) 若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  必定存在.

(2) 若函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 则它在闭区间  $[a, b]$  上一定连续.

(3) 若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 函数  $g(x)$  在点  $x_0$  处间断, 则  $f(x) + g(x)$  在点  $x_0$  处连续.

2. 求下列极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow e} (x \ln x + x + 3);$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{e^x + x + 3};$

(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right);$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x^2 - 8} + x).$

3. 证明方程  $x^5 - 3x - 1 = 0$  在 1 与 2 之间至少存在一个实根.

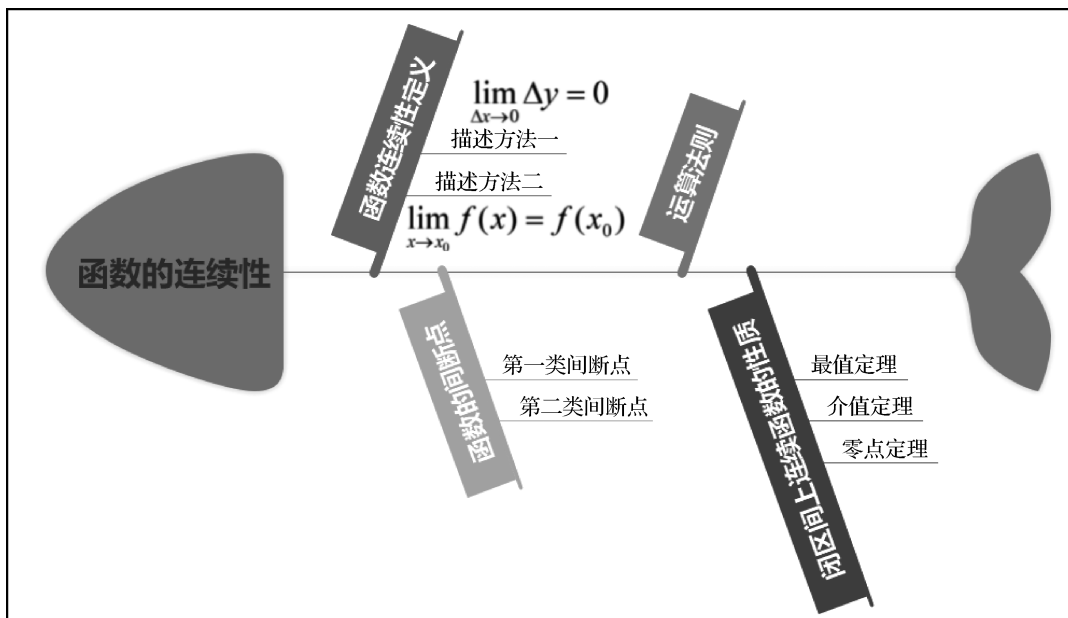
4. 证明曲线  $y = x^4 - x^2 + 3x - 1$  在  $x = -2$  与  $x = -1$  之间至少与  $x$  轴有一个交点.

5. 证明方程  $x = a \sin x + b$  ( $a > 0, b > 0$ ) 至少有一个正根, 且它不超过  $a + b$ .

6. 证明: 若  $f(x)$  与  $g(x)$  都在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) < g(a)$ ,  $f(b) > g(b)$ , 则存在点  $c \in (a, b)$ , 使得  $f(c) = g(c)$ .



## 鱼骨图小结



## 总习题二

### 一、单选题

1. 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ , 则下列说法正确的是( ).  
A.  $f(x_0) = A$   
B.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$   
C.  $f(x)$  在  $x_0$  处有定义  
D.  $f(x)$  在  $x_0$  处连续
2. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x > 0 \\ 2^x, & x \leq 0 \end{cases}$ , 则  $f(x)$  在  $x=0$  处( ).  
A. 连续  
B. 左连续  
C. 右连续  
D. 左右都不连续
3. 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处连续是  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的( ).  
A. 充分不必要条件  
B. 必要不充分条件  
C. 充要条件  
D. 既非充分又非必要条件
4. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin 2x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ , 要使  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 则  $a = ( )$ .

- A. 0                      B. 1                      C.  $\frac{1}{2}$                       D. 2

5. 下列各式不正确的是( ).

- A.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$       B.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$       C.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$       D.  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

## 二、填空题

- 函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$  的连续区间是\_\_\_\_\_.
- 已知函数  $y = x^2 + 1$ , 当  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = 0.01$  时, 函数增量  $\Delta y =$ \_\_\_\_\_.
- 设  $f(x) = (1 + 3x^2)^{\frac{1}{x^2}}$ , 补充定义  $f(0) =$ \_\_\_\_\_, 可使函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续.
- 函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$  的间断点是\_\_\_\_\_.
- 设  $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \arctan \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ , 则  $x = 0$  是  $f(x)$  的\_\_\_\_\_类间断点.

## 三、计算题

- 求函数  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$  的间断点, 并指出间断点的类型.
- (2004 年) 求函数  $f(x) = \frac{x}{\sin x}$  的间断点, 并指出间断点的类型.
- 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 + 2}$ .
- 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ .
- 求  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$ .
- 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x}$ .
- 函数  $f(x) = \begin{cases} a, & x = 1 \\ \frac{x^2 + bx + a}{x-1}, & x \neq 1 \end{cases}$  在  $x = 1$  处连续, 求  $a$  和  $b$  的值.

## 四、证明题

- 证明  $f(x) = |x|$  在  $x = 0$  处连续.
- 证明  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .
- 证明方程  $x^5 - 3x = 2$  在 1 与 2 之间至少存在一个实根.
- 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 0$ , 求证: 至少存在一点  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f(\xi) = \xi$ .

## 第三章

# 惊叹国家速度 明晰变化速率——导数及其应用

### 课程思政元素

航天技术是国家综合实力的重要组成和标志之一，进入空间的能力是综合国力和科技实力的重要标志。

运载火箭则是如今人类克服地球引力、进入空间的唯一工具，是发展空间技术、确保空间安全的基石，是实现航天器快速部署、重构、扩充和维护的根本保障，是大规模开发和利用空间资源的载体，是国家空间军事力量和军事应用的重要保证，是国民经济发展和新军事变革的重要推动力量。

长征系列运载火箭(英文: Long March Launch Vehicles)是中国自行研制的航天运载工具。长征火箭具备发射低、中、高不同地球轨道不同类型卫星及载人飞船的能力，并具备无人深空探测能力。

中国高铁是世界上最先进和最发达的高速铁路网络之一。自2007年首次投入运营以来，中国的高铁系统已经迅速发展成为全球最大规模的高速铁路网。中国高铁以其出色的技术、高效的运营和快速的列车速度而闻名于世。中国高铁的发展不仅带动了国内经济的增长，也为中国和世界各国的交通运输领域树立了新的标杆。其先进的技术和高效的运营模式成为许多国家和地区发展高铁系统的榜样。中国高铁系统的成功不仅改变了人们出行的方式，也为世界各国的基础设施建设提供了宝贵的经验和启示。我国高铁的瞬时速度达到350 km/h。

宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学。

——华罗庚

导数是数学中最美丽的发明之一。

——卡尔·弗里德里希·高斯

导数是函数微小变化的极限比率。

——约翰·伯努利

17 世纪,有许多科学问题需要解决,这些问题也就成了促使微积分产生的因素.第一类是研究物体运动时即时速度的问题;第二类是求曲线的切线的问题;第三类是求函数的最大值和最小值问题;第四类是求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积以及物理中物体的重心、引力等问题.



牛顿



莱布尼茨

17 世纪下半叶,英国数学家、物理学家牛顿和德国数学家莱布尼茨分别独自研究和完成了微积分的创立工作.

本章主要讨论导数的概念、应用和相关的计算方法.

## 第一节 导数的概念



导数的定义

### 一、两个引例

**引例 1** 变速直线运动的瞬时速度.

如图 3-1-1 所示,和谐号列车运行过程中,在车厢屏幕上显示的“速度:309 km/h”表示的是当前时刻列车的瞬时速度.那么如何求出列车在某一时刻  $t_0$  的瞬时速度呢?



图 3-1-1

根据路程、速度和时间的关系,如果列车做匀速直线运动,即它在运动过程中速度保持不变,则有

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\text{经过的路程}}{\text{所花的时间}}.$$

如果列车做变速直线运动, 由于其速度是随时间的变化而变化的, 求每一时刻的速度, 初等数学显得无能为力, 用路程、速度和时间的关系式只能求得某一时间段内的平均速度. 也就是说, 在解决实际问题的过程中, 遇到了速度的“变”与“不变”的矛盾, 或者说是“匀速”与“不匀速”的矛盾. 事实上, 这对矛盾在一定条件下是可以转化的, 尽管在整个时间段内速度是变的, 但在很小的一段时间间隔内, 速度可以看成不变的, 这种方法称为“以不变代变”, 或“以匀代不匀”.

运用这种思考方法, 当列车从时刻  $t_0$  到  $t_0 + \Delta t$  这段时间内通过的路程为

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$$

则平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

如果  $\Delta t$  很小, 列车在这段时间内运动可以看作匀速的, 因此,  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  近似地作为列车在  $t_0$  时刻的瞬时速度,  $\Delta t$  越小, 近似程度越高. 但是, 无论  $\Delta t$  多么小, 这个平均速度只是瞬时速度的近似值, 而不是精确值. 为了从近似值过渡到精确值, 令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 平均速度  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  就转化为瞬时速度, 即

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t_0)$$

由此得到

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}. \quad (3-1-1)$$

**引例 2** 曲线上某点处切线的斜率.

如图 3-1-2 所示, 设  $M(x_0, y_0)$  是曲线  $y = f(x)$  上的一点, 求曲线在  $M$  点处的切线斜率.

在曲线上另取一点  $N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ , 它是曲线上的一个动点, 位置随着  $\Delta x$  的变化而变化, 由此得到曲线的割线  $MN$ , 其中,  $\varphi$  为割线  $MN$  的倾斜角,  $\Delta x$  越小, 割线  $MN$  越接近于切线  $MT$  的位置. 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 动点  $N$  沿曲线趋于点  $M$ , 割线  $MN$  的极限位置就是曲线在点  $M$  处的切线. 根据斜率公式有

$$\tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

则切线的斜率为

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (3-1-2)$$

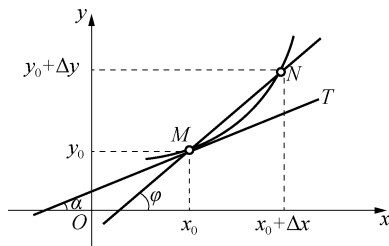


图 3-1-2

其中,  $\alpha$  为切线  $MT$  的倾斜角, 从而有

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

上面两个实例, 虽然具体的含义不同, 但可以抽取出相同的数学模型: 当自变量改变量趋于 0 时, 函数改变量与自变量改变量之比的极限, 如式(3-1-1)、式(3-1-2). 这种特殊的极限称为函数的导数.

## 二、函数在一点处的导数与导函数

**定义 1** 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某领域内有定义, 当自变量  $x$  在  $x_0$  处有增量  $\Delta x$  ( $x_0 + \Delta x$  仍在该领域内) 时, 函数  $y$  取得相应的增量  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ , 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 并称此极限为函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处的导数,

记作:  $f'(x_0)$ ,  $y' \Big|_{x=x_0}$ ,  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}$ ,  $\frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0}$ . 即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (3-1-3)$$

若当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  的极限不存在, 我们就称函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处不可导或导数不存在.

**说明** (1) 导数为函数增量与自变量增量之比的极限, 它表示函数在点  $x_0$  处的变化率, 反映了函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处变化的快慢. 而  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  反映的是自变量从  $x_0$  变到  $x_0 + \Delta x$  时, 函数  $y = f(x)$  的平均变化率.

(2) 由于  $\Delta x = x - x_0$ , 故  $x_0 + \Delta x = x$ , 定义式(3-1-3)又可以记作

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (3-1-4)$$

(3) 当  $x_0 = 0$  时,  $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .

定义 1 给出了求函数在一点处的导数步骤. 一般可分为以下三步:

(1) 求增量:  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ;

(2) 作差商:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ;

(3) 取极限:  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

**例 1** 已知函数  $f(x) = x^2$ , 求  $f'(1)$ .

解 按以上三步进行.

(1) 求增量:  $\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1) = (1+\Delta x)^2 - 1^2 = (\Delta x)^2 + 2\Delta x$ ;

(2) 作差商:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = 2 + \Delta x$ ;

(3) 取极限:  $f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2$ .

**定义 2** 如果函数  $y=f(x)$  在区间  $(a, b)$  内的每一点都可导, 则称  $y=f(x)$  在区间  $(a, b)$  内可导. 如图 3-1-3 所示, 此时, 对于区间  $(a, b)$  内的每一个点  $x$ , 都有唯一的导数值与之对应, 这就定义了一个新的函数, 称为函数  $y=f(x)$  在区间  $(a, b)$  内对  $x$  的导函数, 简称导数, 记为

$$f'(x), y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}.$$

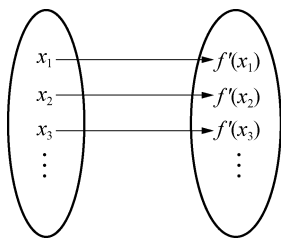


图 3-1-3

**例 2** 求  $f(x) = \frac{1}{x}$  的导数.

解  $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)},$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{x(x+\Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}.$$

显然, 函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处的导数就是导函数  $f'(x)$  在点  $x=x_0$  处的函数值, 即

$$f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0}.$$

### 三、导数的几何意义

$f'(x_0)$  表示函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处的导数. 它的几何意义是: 曲线  $y=f(x)$  在点  $M(x_0, y_0)$  处的切线的斜率, 即  $k=f'(x_0)$ .

由导数的几何意义以及直线的点斜式方程, 曲线  $y=f(x)$  在点  $M(x_0, y_0)$  的切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

法线方程为

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

**例 3** 求曲线  $y=x^2$  在点  $(1, 1)$  处的切线方程和法线方程.

解 由例 1 知道,

$$k = f'(1) = 2,$$

所以曲线  $y=x^2$  在点  $(1, 1)$  处的切线方程为



$$y-1=2(x-1), \text{ 或 } 2x-y-1=0.$$

曲线  $y=x^2$  在点  $(1, 1)$  处的法线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1), \text{ 或 } x+2y-3=0.$$

#### 四、单侧导数

如果定义 1 中自变量的改变量只从大于 0 的方向或者只从小于 0 的方向趋于 0, 则有下列的单侧导数概念.

**定义 3** 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  左可导, 其极限值为函数  $f(x)$  在  $x_0$  的左导数, 记为  $f'_-(x_0)$ .

**定义 4** 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  右可导, 其极限值为函数  $f(x)$  在  $x_0$  的右导数, 记为  $f'_+(x_0)$ .

左导数和右导数统称为单侧导数.

由于函数  $f(x)$  在某一点的导数是函数增量与自变量增量之比的极限值, 而函数在某点极限存在的充要条件是左、右极限都存在且相等, 因此函数  $f(x)$  在一点  $x=x_0$  处可导的充要条件是左导数和右导数都存在且相等. 即

$$f'(x_0) = A \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = A.$$

如果函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内可导, 且右导数  $f'_+(a)$  和左导数  $f'_-(b)$  都存在, 就说  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上可导.

**例 4** 判断函数  $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处的导数是否存在.

$$\text{解 } f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

因为  $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ , 所以  $f(x)$  在  $x=0$  处的导数不存在, 如图 3-1-4.

函数  $y = |x|$  在  $x=0$  不可导的几何意义是此折线在点  $(0, 0)$  处不存在切线.

上述例子表明, 一个函数在某点处连续却不一定在该点可导. 反之, 如果一个函数在某点可导, 那它在该点是否一定连续呢?

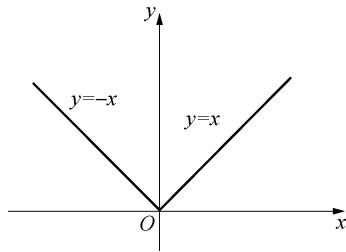


图 3-1-4



单侧导数、可导与连续的关系

**定理 1** 若函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  可导, 则它在点  $x_0$  连续.

**证明** 若  $y=f(x)$  在点  $x_0$  可导, 则有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

从而

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

所以函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  连续.

定理 1 和例 4 说明, 函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件, 但不是充分条件.

利用函数  $y=|x|$  在点  $x=0$  处连续但不可导的性质, 可以构造出一个除有限个点, 甚至是无限个点外都是可导的连续函数. 直观上人们很难想象出有处处连续但处处不可导函数的存在, 直到魏尔斯特拉斯在 1872 年构造出了这样的例子——魏尔斯特拉斯函数, 数学界为之震惊.

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \cos(2\pi b^k x + \theta) \quad (\text{其中 } 0 < \lambda < 1, b > \lambda^{-1}, \theta \in \mathbf{R})$$

从此微积分研究不再只是依赖于直观, 而是向理性思维方向发展.

#### 例 5 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在  $x=0$  处的连续性与可导性(图 3-1-5).

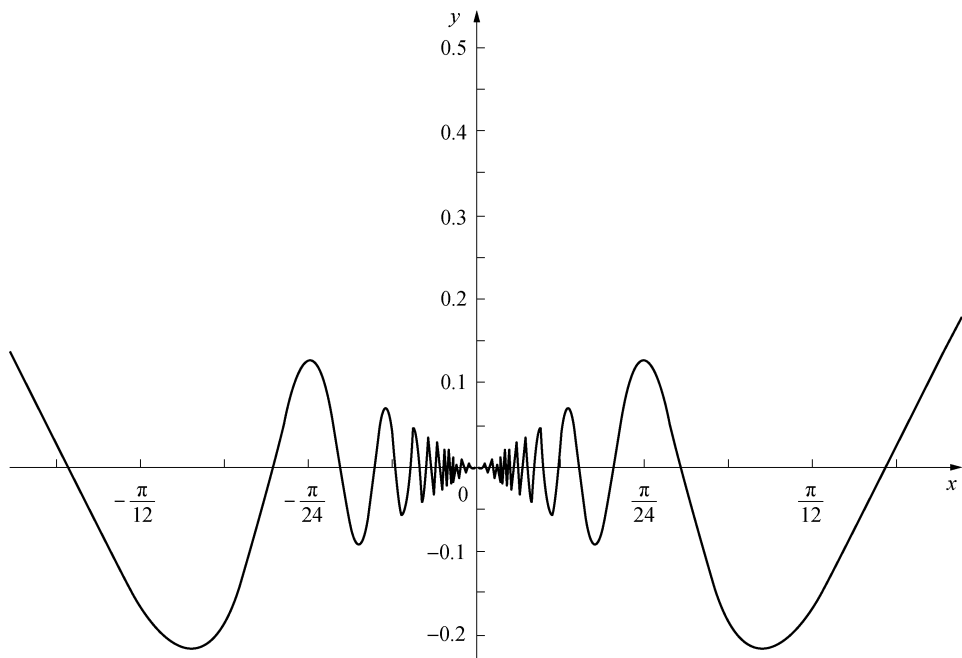


图 3-1-5

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$ , 所以  $f(x)$  在  $x=0$  处连续.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x},$$

极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{\Delta x}$  不存在, 所以  $f(x)$  在  $x=0$  处不可导.

## 五、求导举例

 **例 6** 求函数  $f(x)=C$  ( $C$  为常数) 的导数.

解  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C-C}{\Delta x} = 0$ , 即

$$C' = 0$$

这就是说常数函数的导数为 0.

 **例 7** 求幂函数  $f(x)=x^n$  ( $n \in \mathbf{N}_+$ ) 的导数.

解 由二项式定理, 得

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x + \Delta x)^n - x^n \\ &= \left[ x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n \right] - x^n \\ &= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n, \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1},$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

即

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

特别地, 当  $n=1$  时, 有  $(x)' = 1$ . 今后可以证明

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

当  $\mu = \frac{1}{2}$  时, 有

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

 **例 8** 求正弦函数  $f(x)=\sin x$  的导数.

解  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}},$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x,$$

即

$$(\sin x)' = \cos x.$$

这就是说, 正弦函数的导数是余弦函数.

用类似的方法, 可求得

$$(\cos x)' = -\sin x.$$



**例 9** 求对数函数  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的导数.

**解** 根据对数的运算性质, 有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

即

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

特殊地, 有

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

## 六、高阶导数

对于正弦函数  $f(x) = \sin x$ , 有  $f'(x) = \cos x$ , 对于余弦函数, 我们仍然可以求导, 从而得到正弦函数的二阶导数  $f''(x) = -\sin x$ , 对这个二阶导数继续求导, 可以得到更高阶的导数.

一般地, 如果函数  $f'(x)$  仍然可以对  $x$  求导, 它的导数称为函数  $y = f(x)$  的二阶导数, 记作

$$f''(x), y'', \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ 或 } \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

函数  $y = f(x)$  的  $n$  阶导数, 记作  $f^{(n)}(x)$ , 含义如下

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$



**例 10** 设函数  $y = \ln x$ , 求  $y', y'', y''', y^{(4)}$ .

**解**  $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x};$

$$y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -(-2)x^{-2-1} = \frac{2}{x^3};$$

$$y^{(4)} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = 2 \times (-3)x^{-3-1} = -\frac{6}{x^4}.$$

二阶导数在物理力学中有重要的意义. 如列车做变速直线运动, 路程  $s$  是时间  $t$  的函数  $s=s(t)$ , 则一阶导数表示列车运行的速度:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

二阶导数表示的是列车的加速度:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{dv}{dt} = a.$$

### 习题 3-1

1. 已知自由落体运动方程  $s=s(t)=\frac{1}{2}gt^2$ , 求:

- (1) 落体在  $t_0=10$ (秒) 到  $t_0+\Delta t=10.1$ (秒) 时间间隔内的平均速度  $\bar{v}$ ;
- (2) 落体在  $t_0=10$ (秒) 到  $t_0+\Delta t=10+\Delta t$ (秒) 时间间隔内的平均速度  $\bar{v}$ ;
- (3) 落体在  $t_0=10$ (秒) 时的瞬时速度.

2. 过曲线  $y=x^2$  上两点  $M_0(1, 1)$  和  $M(1+\Delta x, 1+\Delta y)$  作割线  $\overline{M_0M}$ , 分别求当  $\Delta x=0.1$  及  $\Delta x=0.01$  时, 割线  $\overline{M_0M}$  的斜率, 并求出曲线在点  $M_0$  处的切线斜率.

3. 从定义出发, 求下列函数在  $x=0$ ,  $x=1$  处的导数:

$$(1) y = \frac{1}{x+1};$$

$$(2) y = \sqrt{x}.$$

4. 用函数  $f(x)$  在  $x_0$  处的导数  $f'(x_0)$  表示下列极限:

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

$$(2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}.$$

5. 利用基本公式, 求下列函数的导数.

$$(1) y = x^{-\frac{1}{3}};$$

$$(2) y = \sqrt{x}.$$

6. 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在  $x=0$  处的可导性.

7. 求曲线  $f(x)=x^2$  在  $(2, 4)$  处的切线方程和法线方程.

8. 利用导数的定义证明  $(\cos x)' = -\sin x$ .

9. 函数  $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & 0 \leq x < 1 \\ 3x-1, & 1 \leq x \end{cases}$  在点  $x=1$  处是否可导? 为什么?

10. 求函数  $f(x) = \sqrt{x}$  的三阶导数.

11. 某汽车厂在测试一汽车的刹车性能时发现, 刹车后汽车行驶的路程  $s$  (单位: 米) 与时间  $t$  (单位: 秒) 满足  $s = 20t - 5t^2$ , 假设汽车做直线运动, 求汽车在  $t = 1$  秒时的速度和加速度.

12. 设某工厂生产  $x$  件产品的成本为

$$C(x) = 2\,000 + 100x - 0.1x^2 \text{ (元)},$$

函数  $C(x)$  称为成本函数, 成本函数  $C(x)$  的导数  $C'(x)$  在经济学中称为边际成本. 试求:

(1) 当生产 100 件产品时的边际成本;

(2) 生产第 101 件产品的成本, 并与(1)中求得的边际成本作比较, 说明边际成本的实际意义.



导数的四则运算

## 第二节 函数的求导法则

上一节, 我们根据导数的定义求出了一些基本初等函数的导数, 比如常数的导数, 正弦函数、余弦函数的导数, 等等, 但不能利用定义求所有函数的导数, 因为这将包含大量的、烦琐的运算. 因此, 希望能寻找一些运算法则和求导方法, 借助它们来简化求导运算.

### 一、导数的四则运算

**定理 1** 设函数  $u = u(x)$  和  $v = v(x)$  在  $x$  可导, 则它们的和、差、积、商(除分母为零的点外)在  $x$  也可导, 且

$$(1) [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$(2) [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x); \text{ 当 } v(x) \equiv c \text{ (常数) 时, 有 } [cu(x)]' = cu'(x);$$

$$(3) \left[ \frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

下面我们用极限的定义来证明第(1)(2)公式.

**证明** (1) 设  $f(x) = u(x) + v(x)$ ,

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)] \\ &= [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] \\ &= \Delta u + \Delta v, \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}, \text{ 即 } [u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x).$$

同理可以证明  $[u(x) - v(x)]' = u'(x) - v'(x)$ .

公式(1)可以推广到有限多个函数的代数, 即

$$[u_1(x) \pm u_2(x) \pm \cdots \pm u_n(x)]' = u_1'(x) \pm u_2'(x) \pm \cdots \pm u_n'(x).$$

 **例 1** 求函数  $f(x) = x^2 + \sin x - \sin \frac{\pi}{3}$  的导数.

$$\begin{aligned}\text{解 } f'(x) &= \left(x^2 + \sin x - \sin \frac{\pi}{3}\right)' \\ &= (x^2)' + (\sin x)' - \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)' \\ &= 2x + \cos x - 0 \\ &= 2x + \cos x.\end{aligned}$$

公式(2)证明如下:

(2) 设  $f(x) = u(x)v(x)$ , 则

$$\begin{aligned}\Delta y &= [u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)] - [u(x)v(x)] \\ &= u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x) - v(x)] + v(x)[u(x+\Delta x) - u(x)] \\ &= u(x+\Delta x)\Delta v + v(x)\Delta u \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{u(x+\Delta x)\Delta v}{\Delta x} + \frac{v(x)\Delta u}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= u(x)v'(x) + v(x)u'(x),\end{aligned}$$

即

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

**说明** (1)  $[cu(x)]' = c'u(x) + cu'(x) = cu'(x)$  ( $c$  为常数), 即常数因子可以提到导数符号外面去.

$$(2) [u(x)v(x)]' \neq u'(x)v'(x)$$

$$(3) \text{ 若 } u, v, w \text{ 是三个可导函数, 则有 } (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

 **例 2**  $y = e^x(\sin x + \cos x)$ , 求  $y'$ .

**解** 由定理 1, 有

$$\begin{aligned}y' &= (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)' \\ &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) \\ &= 2e^x \cos x\end{aligned}$$

 **例 3**  $y = \tan x$ , 求  $y'$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= (\tan x)' \\ &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

即

$$(\tan x)' = \sec^2 x.$$

**例 4**某电器厂对冰箱制冷效果进行断电测试,  $t$  小时后冰箱的温度为

$$T = \frac{2t}{0.05t+1} - 20 (\text{单位: } ^\circ\text{C})$$

求冰箱温度  $T$  关于时间  $t$  的导数.**解** 冰箱温度  $T$  关于时间  $t$  的导数为

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \left( \frac{2t}{0.05t+1} - 20 \right)' = \left( \frac{2t}{0.05t+1} \right)' - (20)' \\ &= \frac{2(0.05t+1) - 2t \times 0.05}{(0.05t+1)^2} - 0 = \frac{2}{(0.05t+1)^2} (^\circ\text{C}/\text{h}). \end{aligned}$$



复合函数求导法则

## 二、复合函数导数的求导法则

我们知道  $(\sin x)' = \cos x$ , 那么  $(\sin 2x)' = ?$ 是否等于  $\cos 2x$  呢? 答案是否定的, 因为它不是正弦函数. 由二倍角公式和导数的四则运算法则, 有

$$\begin{aligned} (\sin 2x)' &= (2\sin x \cos x)' \\ &= 2(\sin x)' \cos x + 2\sin x (\cos x)' \\ &= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= 2\cos 2x. \end{aligned}$$

结果比  $\cos 2x$  多了一个系数 2. 事实上, 函数  $y = \sin 2x$  是一个复合函数, 它由  $y = \sin u$ ,  $u = 2x$  复合而成,  $(\sin u)' = \cos u$ ,  $u'(x) = (2x)' = 2$ , 从而

$$(\sin 2x)' = (\sin u)'(2x)' = 2\cos 2x.$$

由这个引例, 我们知道求复合函数的导数首先要弄清函数的复合结构. 下面我们给出复合函数的求导法则.

**定理 2(复合函数求导法则)** 设函数  $y = f(u)$  在点  $u$  处可导,  $u = \varphi(x)$  在点  $x$  处可导, 则复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  在点  $x$  处可导, 且有

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

上式表明: 复合函数的导数等于函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数, 这一复合函数的求导法则通常称为链式法则.

**证明** 由于  $y = f(u)$  在点  $u$  处可导, 所以  $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$ 

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha \quad (\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha = 0, \text{ 即 } \alpha \text{ 为 } \Delta u \rightarrow 0 \text{ 时的无穷小})$$

即

$$\Delta y = f'(u) \Delta u + \alpha \Delta u,$$



两边同除以  $\Delta x$ , 得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] \\ &= f'(u) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\end{aligned}$$

根据函数在某点可导必连续的性质可知, 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\Delta u \rightarrow 0$ , 从而

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha = 0,$$

又因为  $u = \varphi(x)$  在点  $x$  处可导, 所以

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x),$$

故

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \varphi'(x).$$

即

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

如果复合函数的复合层次较多, 这个法则可以推广到有限多个复合步骤构成的复合函数求导.

**推论** 设函数  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(v)$ ,  $v = \psi(x)$  都是可导函数, 则复合函数  $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$  也可导, 且

$$y' = f'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot \psi'(x) = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

求复合函数的导数时, 关键要分清复合函数的复合过程, 认清中间变量.

 **例 5** 设函数  $y = e^{x^2}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

**解**  $y = e^{x^2}$  可以看作由  $y = e^u$ ,  $u = x^2$  复合而成, 所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot 2x = 2xe^{x^2}.$$

 **例 6** 设函数  $y = \cos(x^2 + 3)$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

**解**  $y = \cos(x^2 + 3)$  可以看作由  $y = \cos u$ ,  $u = x^2 + 3$  复合而成, 所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\sin u \cdot 2x = -2x \sin(x^2 + 3).$$

 **例 7** 求函数  $y = \ln(\sin 3x)$  的导数.

**解**  $y = \ln(\sin 3x)$  可以看作由  $y = \ln u$ ,  $u = \sin v$ ,  $v = 3x$  复合而成, 所以

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = (\ln u)'_u \cdot (\sin v)'_v \cdot (3x)'_x = \frac{1}{u} \cdot \cos v \cdot 3 \\ &= \frac{1}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3 = 3\cot 3x.\end{aligned}$$

从以上的例子可以看出,应用复合函数求导法则时,首先要分析所给函数可看作由哪些函数复合而成,或者说,所给函数能分解成哪些函数的复合.如果所给函数能分解成比较简单的函数的复合,而这些简单函数的导数容易求得,那么应用复合函数的求导法则就可以求解所给函数的导数了.

在开始时可以先设中间变量,一步一步去做,熟练之后,中间变量可以省略不写.例7可以按照下面的方式来计算.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sin 3x} \cdot (\sin 3x)' \\ &= \frac{1}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot (3x)' \\ &= \frac{1}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3 \\ &= 3\cot 3x.\end{aligned}$$

 **例8** 求函数  $y = (1 + 2x^3)^4$  的导数.

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{dy}{dx} &= 4(1 + 2x^3)^3 \cdot (1 + 2x^3)' \\ &= 4(1 + 2x^3)^3 \times 6x^2 \\ &= 24x^2(1 + 2x^3)^3.\end{aligned}$$

### 习题 3-2

1. 利用导数的四则运算法则求解下列函数的导数.

$$(1) y = 3x^2 + \frac{1}{x} + 4;$$

$$(2) y = x^3 + \cos x;$$

$$(3) y = x \cdot \ln x;$$

$$(4) y = \frac{\sin x}{x};$$

$$(5) y = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2};$$

$$(6) y = 2e^x \sin x;$$

$$(7) y = (x-1)(x-2)(x-3);$$

$$(8) y = \frac{1-x}{1+x}.$$

2. 求下列函数的导数.

$$(1) y = (3x^2 + 1)^2;$$

$$(2) y = \sin 3x;$$

$$(3) y = \ln \cos x;$$

$$(4) y = \sin^2 x;$$

$$(5) y = \sqrt{2-x^2};$$

$$(6) y = e^{2x};$$

$$(7) y = \log_a(x^2 + 1);$$

$$(8) y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

3. 质量为  $m_0$  的物质在化学分解过程中, 经过时间  $t$  后, 剩余质量  $m$  与时间  $t$  的关系式为  $m = m_0 e^{-kt}$  ( $k > 0$ ), 求质量  $m$  对时间  $t$  的导数.

### 第三节 隐函数的导数



隐函数的导数及  
对数求导法

#### 一、隐函数的导数

有些函数可以用  $y = f(x)$  这样的形式来表示, 其自变量和因变量的关系一目了然, 我们称这样的函数为显函数. 如  $y = \sin x$ ,  $y = \sqrt{1-x^2}$ .

但是有些函数的表达方式却不是这样的, 由方程  $F(x, y) = 0$  所确定的函数称为隐函数. 如方程  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $e^{x+y} = xy$ ,  $x + y^3 - 1 = 0$ .

把一个隐函数化为显函数, 称为隐函数的显化.

例如, 从方程  $x^2 + y^2 = 4$  解出  $y = \pm \sqrt{4-x^2}$ , 就是把隐函数化成了显函数. 但有些隐函数很难化为显函数, 如由方程  $e^{x+y} = xy$  所确定的函数.

隐函数的求导法则: 把方程  $F(x, y) = 0$  中的  $y$  看作  $x$  的函数  $y(x)$ , 再利用复合函数的求导法则, 将方程两端对  $x$  求导, 然后解出  $\frac{dy}{dx}$  即可.

**例 1** 求由方程  $x^2 + y^2 = 4$  所确定的隐函数的导数  $\frac{dy}{dx}$ .

**解** 将方程两边对  $x$  求导, 注意  $y$  是  $x$  的函数, 根据复合函数的求导法则, 有

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 0.$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0.$$

整理得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

**验算** 先解出  $y$ , 即先显化为  $y = \pm \sqrt{4-x^2}$ , 不妨取正的,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4-x^2)' = \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{y}.$$

取负号时同样可以验算得到  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ .

**说明** 隐函数求导时注意以下三点:

- (1) 方程两端同时对  $x$  求导数, 注意  $y$  是  $x$  的函数;
- (2) 从求导后的方程中解出  $y'$  来;
- (3) 隐函数求导允许其结果中含有  $y$ . 求函数在某一点的导数值时不但要把  $x$  值代入, 还要把对应的  $y$  值代入.

 **例 2** 求由方程  $e^y + xy - e = 0$  确定的隐函数的导数  $\frac{dy}{dx}$ .

**解** 方程两边对  $x$  求导, 并应用链式法则, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^y + xy - e) &= 0, \\ e^y \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} &= 0, \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x + e^y}.\end{aligned}$$

 **例 3** 求方程  $y = 2 + xe^y$  确定的隐函数的导数  $y'|_{x=0}$ .

**解** 方程两边对  $x$  求导数, 并应用链式法则, 得

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= e^y + xe^y \frac{dy}{dx}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{e^y}{1 - xe^y}.\end{aligned}$$

由于隐函数导数表达式中含有  $y$ , 所以我们需要先代入原方程求出和  $x$  相对应的  $y$  的值, 才能求出在点  $x=0$  的导数值.

当  $x=0$  时, 代入原方程得  $y=2$ , 所以  $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = \frac{e^y}{1 - xe^y}|_{x=0} = e^2$ .

 **例 4** 求曲线  $x^2 + xy + y^2 = 4$  在点  $M(-2, 2)$  处的切线方程.

**解** 方程两边对  $x$  求导, 得

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0.$$

解出  $y'$ , 得

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}.$$

于是

$$y'|_M = \left(-\frac{2x + y}{x + 2y}\right)\bigg|_{\substack{x=-2 \\ y=2}} = 1.$$

所以曲线在点  $M(-2, 2)$  处的切线方程为

$$y - 2 = 1 \cdot [x - (-2)]$$

即  $x - y + 4 = 0$ , 如图 3-3-1 所示.

## 二、对数求导法

 **例 5** 证明指数函数的导数

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

**证明** 对  $y = a^x$  两边取自然对数, 得

$$\ln y = x \ln a,$$

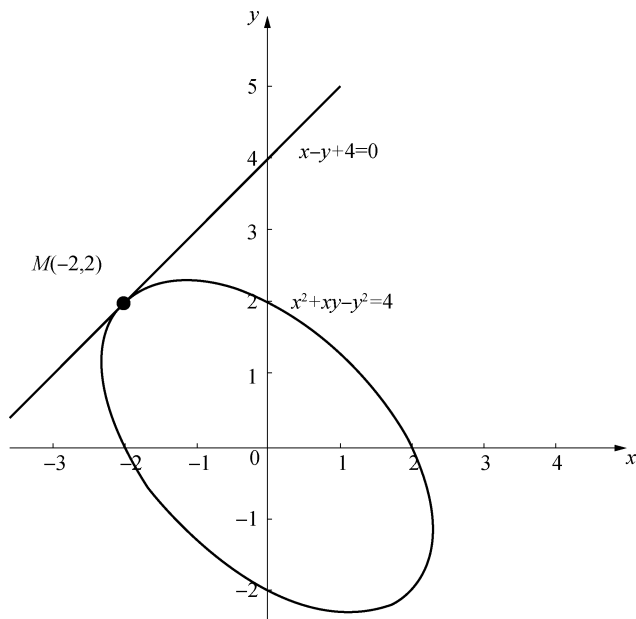


图 3-3-1

方程两边对  $x$  求导数, 并应用链式法则, 得

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \ln a,$$

从而

$$\frac{dy}{dx} = y \ln a = a^x \ln a.$$

特别地, 当  $a = e$  时, 有

$$(e^x)' = e^x.$$

即以  $e$  为底的指数函数  $y = e^x$  的导数是它本身.

在推导指数函数  $y = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的导数时, 采用将函数两边先取对数, 然后用隐函数求导的方法求解. 这种方程通常称为对数求导法. 下面再举几个典型的例子来说明这种方法.



**例 6** 求函数  $y = x^x$  的导数.

**解** 这个函数是幂指函数. 因为底和指数中均含有自变量  $x$ , 显然不能直接用幂函数或者指数函数的求导公式. 运用对数求导法, 对  $y = x^x$  两边取自然对数, 得

$$\ln y = x \ln x.$$

方程两边对  $x$  求导数, 得

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + 1.$$

所以

$$y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

**例 7** 求函数  $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(2x-3)(x-4)}}$  ( $x > 4$ ) 的导数.

**解** 先对函数两边取自然对数, 得

$$\ln y = \frac{1}{2} [\ln(x-1) + \ln(x-2) - \ln(2x-3) - \ln(x-4)].$$

方程两边对  $x$  求导数, 得

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{2x-3} - \frac{1}{x-4} \right).$$

所以

$$y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(2x-3)(x-4)}} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{2x-3} - \frac{1}{x-4} \right).$$

由上面的例子可以看出, 对数求导法主要用于形如  $y = u(x)^{v(x)}$  的幂指函数以及函数表达式为多个因子的幂的连乘积形式的函数的求导运算, 可以大大简化运算过程.

### 三、反三角函数的导数

#### 1. 反正弦函数

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

**证明**  $y = \arcsin x$  ( $-1 < x < 1$ ) 等价于

$$x = \sin y \quad \left( -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right),$$

方程两边对  $x$  求导数, 得

$$1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx},$$

即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

#### 2. 反余弦函数

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

**证明** 略.

#### 3. 反正切函数

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

**证明**  $y = \arctan x$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 等价于

$$x = \tan y \quad \left( -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right),$$

方程两边对  $x$  求导数, 得

$$1 = \sec^2 y \cdot \frac{dy}{dx},$$

即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

#### 4. 反余切函数

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

证明 略.

为便于查阅, 把基本初等函数的导数公式和求导法则归纳如下.

##### 1. 常用基本初等函数的求导公式

- |                                              |                                                       |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| (1) $(C)' = 0,$                              | (2) $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1},$                       |
| (3) $(\sin x)' = \cos x,$                    | (4) $(\cos x)' = -\sin x,$                            |
| (5) $(\tan x)' = \sec^2 x,$                  | (6) $(\cot x)' = -\csc^2 x,$                          |
| (7) $(\sec x)' = \sec x \tan x,$             | (8) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$                      |
| (9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ | (10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$        |
| (11) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$       | (12) $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$ |
| (13) $(a^x)' = a^x \ln a,$                   | $(e^x)' = e^x.$                                       |
| (14) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$      | $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$                             |

##### 2. 基本求导公式

- (1)  $(u \pm v)' = u' \pm v'.$
- (2)  $(uv)' = u'v + uv', \quad (Cu)' = Cu'.$
- (3)  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

##### 3. 复合函数求导法则

设函数  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$ , 且  $f(u)$ ,  $\varphi(x)$  都可导, 则复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  的导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

### 习题 3-3

1. 求由方程  $e^y + xy - e = 0$  所确定的隐函数的导数  $\frac{dy}{dx}$ .
2. 求由方程  $y = x + \frac{1}{2} \sin y$  所确定的隐函数的导数  $\frac{dy}{dx}$ .
3. 求椭圆  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  在点  $M\left(-2, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$  处的切线方程和法线方程.

4. 应用对数求导法求下列函数的导数:

$$(1) y = (\ln x)^x;$$

$$(2) y = x^{\sin x} (x > 0);$$

$$(3) y = (1+x)^x;$$

$$(4) y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}} \quad (x > 4).$$

5. 证明:  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-1 < x < 1).$



费马定理和罗尔定理

## 第四节 中值定理

导数是刻画函数在一点处变化率的数学概念, 它只能从局部考察函数的性态. 在实际生活中, 常常要研究函数在区间上的整体性态, 本节的中值定理就是从局部推测整体性质的有力工具.

### 一、费马定理

作为中值定理的预备知识, 先定义函数的极值概念.

**定义 1** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  内有定义, 若对任意的  $x \in U(x_0)$ , 恒有

$$f(x_0) \geq f(x),$$

则称  $f(x_0)$  为函数  $f(x)$  的极大值,  $x_0$  称为极大值点.

**定义 2** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  内有定义, 若对任意的  $x \in U(x_0)$ , 恒有

$$f(x_0) \leq f(x),$$

则称  $f(x_0)$  为函数  $f(x)$  的极小值,  $x_0$  称为极小值点.

极大值和极小值统称为极值. 极大值点、极小值点统称为极值点.

如图 3-4-1 所示, 函数在  $x = x_0, x_2$  处均取得极大值, 在  $x = x_1$  处取得极小值,  $x_0, x_1, x_2$  均为极值点.

**定理 1 (费马定理)** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  内有定义, 并且在  $x_0$  处可导, 如果对任意的  $x \in U(x_0)$ , 有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) \geq f(x_0)),$$

那么

$$f'(x_0) = 0.$$

简言之, 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 且在点  $x_0$  取得极值, 则必有

$$f'(x_0) = 0.$$

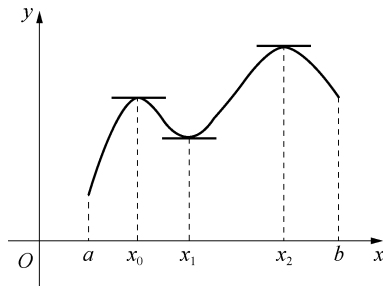


图 3-4-1



**证明** 不妨设  $x \in U(x_0)$  时,  $f(x) \leq f(x_0)$  (如果  $f(x) \geq f(x_0)$ , 可以类似地证明). 于是, 对于  $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$ , 有

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0),$$

从而

$$\text{当 } \Delta x > 0 \text{ 时, } \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0;$$

$$\text{当 } \Delta x < 0 \text{ 时, } \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

根据函数  $f(x)$  在  $x_0$  可导的条件及极限的保号性, 便得到

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0,$$

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

所以

$$f'(x_0) = 0.$$

**说明** 费马定理的几何解释: 若曲线  $y = f(x)$  上处处有切线, 且  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极值, 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  处有水平切线 (如图 3-4-1).

由导数的概念知道,  $f'(x_0)$  是  $f(x)$  在点  $x_0$  的变化率, 因而  $f'(x_0) = 0$  就表明  $f(x)$  在点  $x_0$  的变化率为 0, 所以使导数  $f'(x)$  等于 0 的点称为函数  $f(x)$  的稳定点 (或驻点).

费马定理给出了可导函数存在极值的必要条件, 但不是充分条件, 也就是说可导函数的极值点一定是稳定点, 但稳定点不一定是极值点. 例如函数  $y = x^3$ , 虽然  $x = 0$  是它的稳定点, 但不是极值点, 如图 3-4-2 所示.

## 二、罗尔定理

观察图 3-4-3, 设曲线弧  $\widehat{AB}$  是函数  $y = f(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) 的图形. 这是一条连续的曲线弧, 除端点外处处具有不垂直于  $x$  轴的切线, 且两个端点的纵坐标相等, 即  $f(a) = f(b)$ . 可以发现在曲线的最高点  $C$  或最低点  $D$  处, 曲线有水平的切线. 如果记  $C$  点的横坐标为  $\xi$ , 那么就有  $f'(\xi) = 0$ .

现在用分析语言把这个几何现象描述出来, 就是下面的罗尔定理.

**定理 2 (罗尔定理)** 如果函数  $f(x)$  满足

(1) 在闭区间  $[a, b]$  上连续;

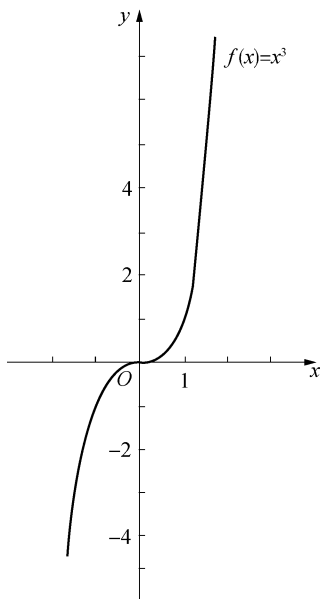


图 3-4-2

(2) 在开区间  $(a, b)$  内可导;

(3) 在区间端点的函数值相等, 即  $f(a) = f(b)$ , 那么在  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi (a < \xi < b)$ , 使得

$$f'(\xi) = 0.$$

**证明** 由于  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 根据闭区间上连续函数的最大值和最小值定理,  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上必定取得它的最大值  $M$  和最小值  $m$ . 这样, 只有两种可能情形:

(1)  $M = m$ . 这时  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上必然取相同的数值  $M$ :  $f(x) \equiv M$ . 由此,  $\forall x \in (a, b)$ , 有  $f'(x) = 0$ . 因此, 任取  $\xi \in (a, b)$ , 有  $f'(\xi) = 0$ .

(2)  $M > m$ . 因为  $f(a) = f(b)$ , 所以  $M$  和  $m$  这两个数中至少有一个不等于  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  的端点处的函数值. 为确定起见, 不妨设  $M \neq f(a)$  (如果设  $m \neq f(a)$ , 证法完全类似). 那么必定在开区间  $(a, b)$  内有一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = M$ . 因此,  $\forall x \in [a, b]$ , 有  $f(x) \leq f(\xi)$ , 从而由费马定理可知  $f'(\xi) = 0$ . 证毕.

**说明** 罗尔定理的几何意义: 在闭区间  $[a, b]$  上的连续函数  $y = f(x)$ , 如果除端点外处处都有不垂直于  $x$  轴的切线, 且两端点的纵坐标相等, 那么曲线上至少有一点, 在该点处的切线平行于  $x$  轴.

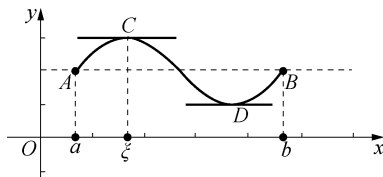


图 3-4-3

**例 1** 验证罗尔定理对函数  $y = \ln \sin x$  在区间  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$  上的正确性. 如图 3-4-4 所示.

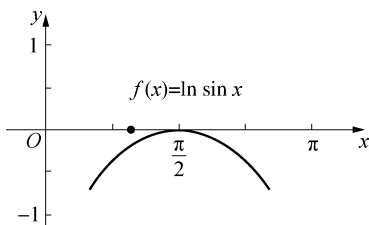


图 3-4-4

**证明**  $f(x) = \ln \sin x$  在  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$  上连续, 在  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$  内可导, 又

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln \sin \frac{\pi}{6} = \ln \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \ln \sin \frac{5\pi}{6} = \ln \frac{1}{2},$$

所以

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right),$$

因此满足罗尔定理的条件, 则在  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$  内至少存在一个  $\xi$ , 使得

$$f'(\xi) = 0,$$

而

$$f'(\xi) = \frac{\cos \xi}{\sin \xi} = 0,$$

得到

$$\xi = \frac{\pi}{2} \in \left( \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right).$$

所以得证.



### 例 2

设  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ , 不求函数  $f(x)$  的导数, 判断其导函数有几个实根, 以及实根所在的范围.

**解** 因为  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是连续且可导的, 并且  $f(1) = f(2) = f(3)$ , 所以在  $[1, 2]$ ,  $[2, 3]$  上满足罗尔定理的三个条件. 因此在  $(1, 2)$  内至少存在一点  $\xi_1$ , 使得  $f'(\xi_1) = 0$ . 同理, 在  $(2, 3)$  内至少存在一点  $\xi_2$ , 使得  $f'(\xi_2) = 0$ .

又  $f'(x)$  是二次多项式, 最多有两个实根, 所以  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$  的导函数有两个实根, 分别在区间  $(1, 2)$  及  $(2, 3)$  内.

## 三、拉格朗日中值定理

罗尔定理中  $f(a) = f(b)$  这个条件是相当特殊的, 它使罗尔定理的应用受到限制. 如果把  $f(a) = f(b)$  这个条件取消, 但仍保留其余两个条件, 并相应地改变结论, 那么就得到微分学中十分重要的拉格朗日中值定理.



拉格朗日中值定理

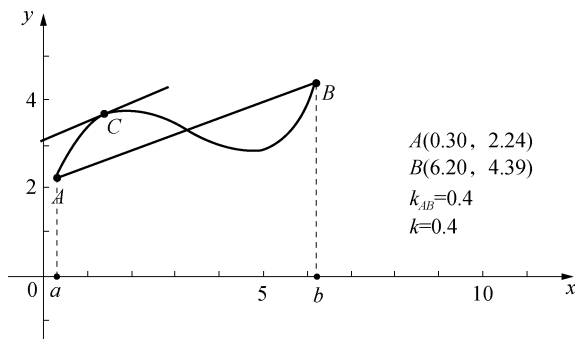


图 3-4-5

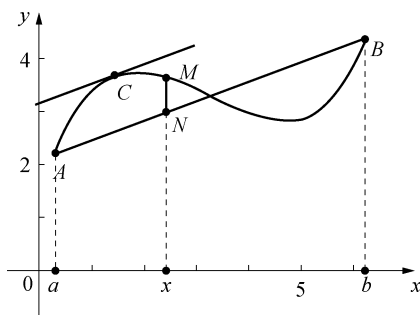


图 3-4-6

**定理 3(拉格朗日中值定理)** 如果函数  $f(x)$  满足

(1) 在闭区间  $[a, b]$  上连续;

(2) 在开区间  $(a, b)$  内可导,

那么在  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$ , 使等式

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

或



$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad (3-4-1)$$

先看一下定理 3 的几何意义：由图 3-4-5 可看出， $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  为弦 AB 的斜率，而  $f'(\xi)$  为曲线在点 C 处的切线的斜率，因此拉格朗日中值定理的几何意义是：如果连续曲线  $y=f(x)$  的弧  $\widehat{AB}$  上除端点外处处具有不垂直于  $x$  轴的切线，那么这弧上至少有一点 C，使曲线在 C 点处的切线平行于弦 AB。

从罗尔定理的几何意义中(图 3-4-3)看出，由于  $f(a)=f(b)$ ，弦 AB 是平行于  $x$  轴的，因此点 C 处的切线实际上也平行于弦 AB。由此可见，罗尔定理是拉格朗日中值定理的特殊情形。

从上述拉格朗日中值定理与罗尔定理的关系，自然想到利用罗尔定理来证明拉格朗日中值定理。但在拉格朗日中值定理中，函数  $f(x)$  不一定具备  $f(a)=f(b)$  这个条件，为此我们设想构造一个与  $f(x)$  有密切联系的函数  $\varphi(x)$  (称之为辅助函数)，使  $\varphi(x)$  满足条件  $\varphi(a)=\varphi(b)$ 。然后对  $\varphi(x)$  应用罗尔定理，再把对  $\varphi(x)$  所得的结论转化到  $f(x)$  上，证得所要的结果。我们从拉格朗日中值定理的几何解释中来寻找辅助函数，从图 3-4-6 中看到，有向线段  $\overrightarrow{NM}$  的值是  $x$  的函数，把它表示为  $\varphi(x)$ ，它与  $f(x)$  有密切的联系，当  $x=a$  及  $x=b$  时，点 M 与点 N 重合，即有  $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ 。为求得函数  $\varphi(x)$  的表达式，设直线 AB 的方程为  $y=L(x)$ ，则

$$L(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

由于点 M、N 的纵坐标依次为  $f(x)$  及  $L(x)$ ，故表示有向线段 NM 的值的函数

$$\varphi(x) = f(x) - L(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

下面就利用这个辅助函数来证明拉格朗日中值定理。

**证明** 引进辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

容易验证函数  $\varphi(x)$  适合罗尔定理的条件： $\varphi(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续，在开区间  $(a, b)$  内可导，且  $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ ，

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

根据罗尔定理，可知在  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$ ，使  $\varphi'(\xi)=0$ ，即

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

由此得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

即

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

证毕.

**说明** 显然, 公式(3-4-1)对于  $b < a$  也成立. 该式叫作拉格朗日中值公式.

应用拉格朗日中值定理, 我们可得到两个重要推论.

大家知道, 如果函数  $f(x)$  在某一区间上是一个常数, 那么  $f(x)$  在该区间上的导数恒为零. 反过来, 导数为 0 的函数是否为常函数呢?

**推论 1** 若函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内可导, 且  $f'(x) = 0$ , 则  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内是一个常数.

**证明** 在区间  $(a, b)$  内任取两点  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ , 函数  $f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上满足拉格朗日中值定理的条件, 有

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2).$$

由假定,  $f'(\xi) = 0$ , 所以  $f(x_2) - f(x_1) = 0$ . 即

$$f(x_2) = f(x_1).$$

因为  $x_1, x_2$  是  $(a, b)$  内任意两点, 所以上面的等式表明:  $f(x)$  在  $(a, b)$  内的函数值总是相等的, 这就是说,  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内是一个常数.

**推论 2** 若函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在区间  $(a, b)$  内满足条件  $f'(x) \equiv g'(x)$ , 则这两个函数至多相差一个常数, 即  $f(x) = g(x) + C$ .

**证明** 设  $h(x) = f(x) - g(x)$ , 则

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad (x \in (a, b)).$$

由推论 1,  $h(x) = C$ , 即

$$f(x) = g(x) + C.$$

**例 3** 证明恒等式  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in [-1, 1])$ .

**证明** 设  $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ , 则  $f'(x) \equiv 0 (x \in [-1, 1])$ , 由推论 1, 得  $f(x) \equiv C$ . 因为  $f(0) = \frac{\pi}{2}$ , 所以  $C = \frac{\pi}{2}$ . 又

$$f(1) = \arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$f(-1) = \arcsin(-1) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2},$$

所以有  $f(x) = \frac{\pi}{2} (x \in [-1, 1])$ , 即

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in [-1, 1]).$$

**例 4** 证明不等式

$$\arctan x_1 - \arctan x_2 \leq x_2 - x_1 \quad (x_1 < x_2)$$

**证明** 设  $f(x) = \arctan x$ , 显然,  $f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上满足拉格朗日中值定理的条件, 所以



$$\begin{aligned}\arctan x_2 - \arctan x_1 &= f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad \xi \in (x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{1+\xi^2}(x_2 - x_1) \leq x_2 - x_1\end{aligned}$$

得证.



**例 5** 证明当  $x > 0$  时,

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

**证明** 设  $f(t) = \ln(1+t)$ , 显然  $f(t)$  在区间  $[0, x]$  上满足拉格朗日中值定理的条件, 根据定理, 应有

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0), \quad 0 < \xi < x.$$

由于  $f(0) = 0$ ,  $f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi}$ , 因此上式即为

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi}.$$

又由  $0 < \xi < x$ , 有

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x,$$

即

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

**说明** 此题也可通过构造函数  $f(t) = \ln t$  在  $[1, 1+x]$  上运用拉格朗日中值定理进行证明.

**\* 定理 4(柯西中值定理)** 如果函数  $f(x)$  及  $g(x)$  满足

- (1) 在闭区间  $[a, b]$  上连续;
- (2) 在开区间  $(a, b)$  内可导;
- (3) 对任一  $x \in (a, b)$ ,  $g'(x) \neq 0$ .

那么在  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$ , 使等式

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad (3-4-2)$$

成立.

**证明** 略.

很明显, 如果取  $g(x) = x$ , 那么  $g(b) - g(a) = b - a$ ,  $g'(x) = 1$ , 因而公式(3-4-2)就可以写成

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

这样就变成拉格朗日中值公式了.

罗尔定理、拉格朗日中值定理和柯西中值定理统称为中值定理, 它们沟通了函数及其导数之间的关系, 从而为我们研究导数的某些特性提供了方法.

## 习题 3-4

1. 对函数  $f(x) = \sin x$  在  $[0, \pi]$  上验证罗尔定理, 并作出其图形.
2. 讨论下列问题(所举的例子可以用图形表示):
  - (1) 举例说明, 罗尔定理的条件是缺一不可的;
  - (2) 举例说明, 罗尔定理中导数的零点不一定唯一.
3. 设  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ , 不求函数  $f(x)$  的导数, 判断其导函数有几个实根, 以及实根所在的范围.
4. 对函数  $f(x) = \ln x$  在区间  $x \in [1, 2]$  上验证拉格朗日中值定理.
5. 证明恒等式  $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} \quad (-\infty < x < +\infty)$ .
6. 证明不等式  $|\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1|$ .
7. 证明不等式  $e^x > 1 + x \quad (x > 0)$ .
- \* 8. 对函数  $f(x) = \sin x$  及  $g(x) = x + \cos x$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上验证柯西中值定理的正确性.

## 第五节 洛必达法则



洛必达法则

在第一章中, 我们介绍了极限的四则运算法则, 然而要求出下面的极限, 例如

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x, \quad \dots,$$

是无能为力的, 因为它们都不能直接运用极限的运算法则求解.

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\frac{1 - \cos x}{x^2}$  的分子和分母的极限都是无穷小, 我们把这种形式简记为  $\frac{0}{0}$  型.

当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\frac{\ln x}{x}$  的分子和分母的极限都是无穷大, 我们把这种形式简记为  $\frac{\infty}{\infty}$  型.

当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $x$  是无穷小,  $\ln x$  是无穷大, 我们把这种形式简记为  $0 \cdot \infty$  型.

上述极限是否存在以及是何值, 需要进一步讨论, 通常把上述极限叫作未定式的极限. 洛必达法则为我们提供了一种确定上述未定式的相当普遍且有效的方法.

一、 $\frac{0}{0}$  型未定式

**定理 1 (洛必达法则 I)** 设函数  $f(x)$  及  $g(x)$  满足

- (1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ;
- (2) 在点  $x_0$  的某去心邻域内可导且  $g'(x) \neq 0$ ;
- (3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ (或 } \infty \text{)},$

则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

这就是说, 当  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在时,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  也存在且等于  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ; 当  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  为无穷大时,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  也是无穷大. 这种在一定条件下通过对分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达(L'Hospital)法则.

其证明需用到柯西中值定理, 略去不证.

**说明** (1) 如果  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  当  $x \rightarrow x_0$  时仍属  $\frac{0}{0}$  型, 且这时  $f'(x)$ ,  $g'(x)$  仍能满足定理中  $f(x)$ ,  $g(x)$  所满足的条件, 那么可以继续使用洛必达法则, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

且可以以此类推.

(2) 在相应条件下, 当  $x \rightarrow \infty$  时的  $\frac{0}{0}$  型未定式, 上述结论也成立.

**例 1** 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ .

**解** 由于  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) = 0$ , 极限为  $\frac{0}{0}$  型未定式, 利用洛必达法则, 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{1} = 3,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$$

在具体解题时, 通常可以写为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{1} = 3.$$

**例 2** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ .  $\left(\frac{0}{0} \text{ 型}\right)$

**解**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x)'}{(\sin 3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{3 \cos 3x} = \frac{2}{3}.$

**例 3** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ .  $\left(\frac{0}{0} \text{ 型}\right)$

**解** 连续两次使用洛必达法则, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

## 二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

**定理 2 (洛必达法则 II)** 设函数  $f(x)$  及  $g(x)$  满足



- (1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ ;  
 (2) 在点  $x_0$  的某去心邻域内可导且  $g'(x) \neq 0$ ;  
 (3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$  (或  $\infty$ ),

则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

这里, 将  $x \rightarrow x_0$  换成  $x \rightarrow \infty$  也成立.

 **例 4** 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \cdot \left(\frac{\infty}{\infty} \text{型}\right)$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$

 **例 5** 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \cdot \left(\frac{\infty}{\infty} \text{型}\right)$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$

当  $x \rightarrow +\infty$  时, 对数函数、幂函数、指数函数的值都无限增大, 但它们增长的速度是不一样的, 指数函数增长最快, 幂函数次之, 对数函数增长最慢.

### 三、其他未定式

$\frac{0}{0}$  型与  $\frac{\infty}{\infty}$  型是两种基本的未定式, 除此之外, 还有  $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$  等

类型的未定式, 虽然它们不能直接用洛必达法则, 但可以通过适当变形, 将它们转化为  $\frac{0}{0}$

型与  $\frac{\infty}{\infty}$  型未定式, 然后再用洛必达法则.

 **例 6** 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right) \cdot (\infty \cdot 0 \text{ 型})$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \left( \frac{0}{0} \text{ 型} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

 **例 7** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right) \cdot (\infty - \infty \text{ 型})$

解  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x^2-1} \left( \frac{0}{0} \text{ 型} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

 **例 8** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ . ( $0^0$  型)

解  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x)} = e^0 = 1.$

 **例 9** 求  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ . ( $1^\infty$  型)

解 因为

$$x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{\ln x}{1-x}}$$

又

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}} = e^{-1}.$$

 **例 10** 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ . ( $\infty^0$  型)

解 因为

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$$

又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1.$$

### 习题 3-5

1. 用洛必达法则求下列极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1};$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x};$

(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x};$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}.$

(5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3};$

(6)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

2. 求下列极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x};$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x;$

(4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x).$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2x}.$$

3. 下列极限能否用洛必达法则求? 为什么?

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}.$$

## 第六节 函数的单调性与凹凸性



函数的单调性

### 一、函数单调性的判别法

单调性是函数的重要性质之一, 它既决定着函数递增和递减的状况, 又能帮助研究函数的极值、证明某些不等式. 本节我们借助导数来研究函数的单调性.

观察图 3-6-1 中几幅函数图像, 分别指出它们的单调增区间、单调减区间.

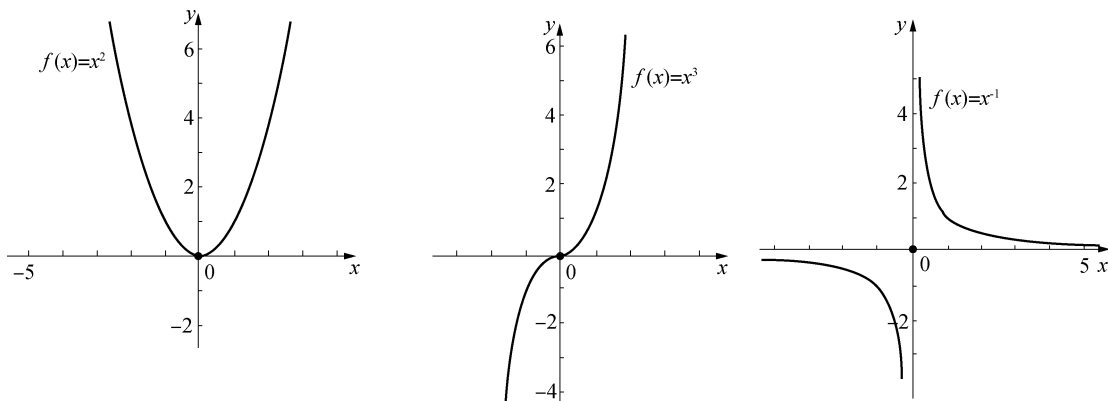


图 3-6-1

借助 geogebra 软件, 探究当函数  $y=f(x)$  在区间  $(a, b)$  内单调递增(其图形是一条沿  $x$  轴正方向上升的曲线)时, 观察曲线上各点的切线斜率符号.

类似探究当函数  $y=f(x)$  在区间  $(a, b)$  单调递减(其图形是一条沿  $x$  轴正方向下降的曲线)时, 观察曲线上各点的切线斜率符号. 如图 3-6-2.

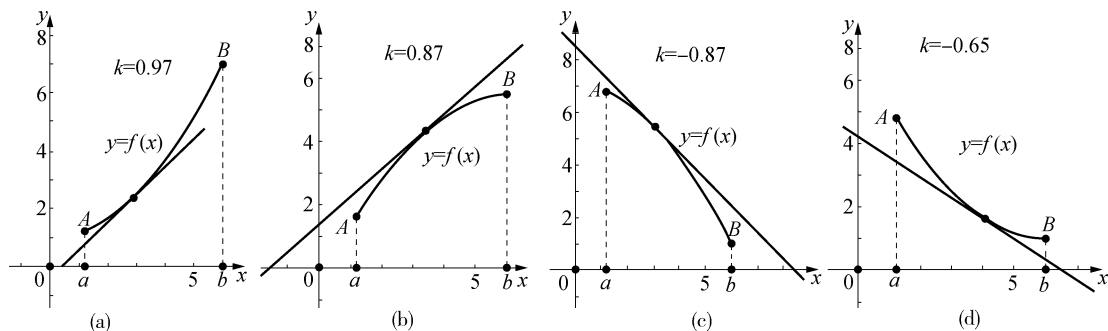


图 3-6-2

由此可以发现,函数的单调性与导数的符号有着密切的联系.

反过来,我们能否用导数的符号来判断函数的单调性呢?事实上,有下面的定理

**定理 1** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,在  $(a, b)$  内可导.

(1)若在区间  $(a, b)$  内  $f'(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上单调递增.

(2)若在区间  $(a, b)$  内  $f'(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上单调递减.

**证明** 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,在  $(a, b)$  内可导,在  $(a, b)$  内上任取两点  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ , 应用拉格朗日中值定理,得到

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (x_1 < \xi < x_2). \quad (3-6-1)$$

由于在(3-6-1)式中,  $x_2 - x_1 > 0$ , 因此,如果在  $(a, b)$  内导数  $f'(x) > 0$ , 那么就有  $f'(\xi) > 0$ . 于是

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0,$$

即

$$f(x_1) < f(x_2),$$

表明函数  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递增.

同理,如果在  $(a, b)$  内导数  $f'(x)$  保持负号,即  $f'(x) < 0$ , 那么  $f'(\xi) < 0$ , 于是  $f(x_2) - f(x_1) < 0$ , 即  $f(x_1) > f(x_2)$ , 表明函数  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递减.

**说明** 如果把这个判定法中的闭区间换成其他各种区间(包括无穷区间), 那么结论也成立. 下面通过具体的例子来加深对定理的理解.

 **例 1** 求函数  $f(x) = x^3 - 3x$  的单调区间.

**解**  $f'(x) = 3x^2 - 3$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x_1 = -1, x_2 = 1$ , 它们把定义区间分成了三个子区间  $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$ , 因为当  $x \in (-\infty, -1)$  时,  $f'(x) > 0$ , 当  $x \in (-1, 1)$  时,  $f'(x) < 0$ , 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ .

所以  $(-\infty, -1)$  和  $(1, +\infty)$  是递增区间,  $(-1, 1)$  是递减区间.

为简便起见,通常归纳为如下的表格:

| $x$     | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 1)$ | $(1, +\infty)$ |
|---------|-----------------|-----------|----------------|
| $f'(x)$ | +               | -         | +              |
| $f(x)$  | ↗               | ↘         | ↗              |

对应的函数图像如图 3-6-3 所示.

 **例 2** 讨论函数  $y = \sqrt[3]{x^2}$  的单调性.

**解** 函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ .

当  $x \neq 0$  时, 函数的导数为  $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ ;

当  $x = 0$  时, 函数的导数不存在. 在  $(-\infty, 0)$  内,  $y' < 0$ , 因此函数  $y = \sqrt[3]{x^2}$  在  $(-$

$-\infty, 0]$ 上单调递减. 在 $(0, +\infty)$ 内,  $y' > 0$ , 因此函数  $y = \sqrt[3]{x^2}$  在 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 函数的图形如图 3-6-4 所示.

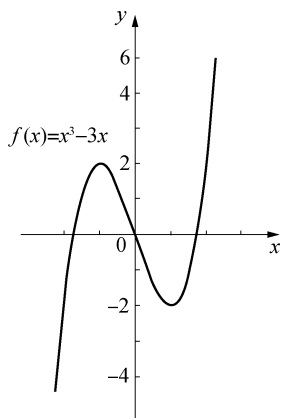


图 3-6-3

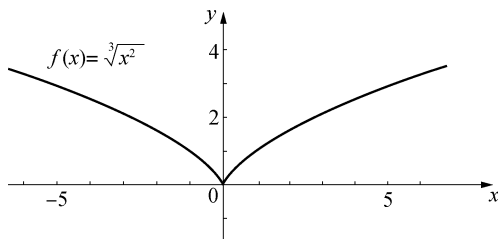


图 3-6-4

**例 3** 证明: 当  $x > 1$  时,  $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ .

**证明** 令  $f(x) = 2\sqrt{x} - \left(3 - \frac{1}{x}\right)$ , 则

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(x\sqrt{x} - 1).$$

$f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上连续, 在  $(1, +\infty)$  内  $f'(x) > 0$ , 因此在  $[1, +\infty)$  上  $f(x)$  单调增加, 从而当  $x > 1$  时,  $f(x) > f(1)$ .

由于  $f(1) = 0$ , 故  $f(x) > f(1) = 0$ , 即

$$2\sqrt{x} - \left(3 - \frac{1}{x}\right) > 0,$$

亦即  $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x} \quad (x > 1)$ .

可以借助两种方式进行数形结合验证, 如图 3-6-5 所示, 是在同一个坐标系中分别绘制两个函数  $f(x) = 2\sqrt{x}$ ,  $g(x) = 3 - \frac{1}{x}$  的图像, 显然当  $x > 1$  时,  $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ . 而在图 3-6-6 中, 只绘制一个函数  $f(x) = 2\sqrt{x} - \left(3 - \frac{1}{x}\right)$  的图像, 当  $x > 1$  时有  $f(x) > 0$ , 故  $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ .

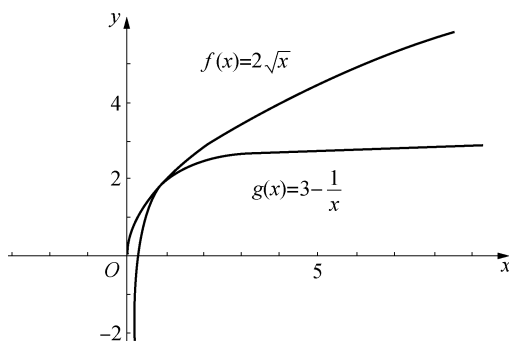


图 3-6-5

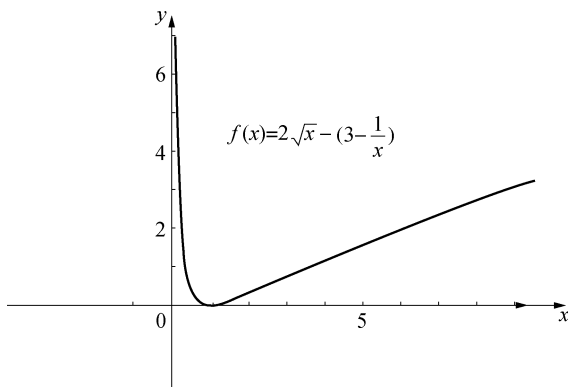


图 3-6-6

**说明** 从例 1 中看出, 有些函数在它的定义区间上不是单调的, 但是当我们用导数等于零的点来划分函数的定义区间以后, 就可以使函数在各个部分区间上单调. 这个结论对于在定义区间上具有连续导数的函数都是成立的. 从例 2 中可看出, 如果函数在某些点处不可导, 则划分函数的定义区间的分点, 还应包括这些导数不存在的点. 综合上述两种情形, 我们有如下结论:

如果函数在定义区间上连续, 除去有限个导数不存在的点外导数存在且在区间内只有有限个驻点, 那么只要用方程  $f'(x)=0$  的根及  $f'(x)$  不存在的点来划分函数  $f(x)$  的定义区间, 就能保证  $f'(x)$  在各个部分区间内保持固定符号, 因而函数  $f(x)$  在每个部分区间上单调.

## 二、曲线的凹凸性与拐点

函数的单调性反映在图形上, 就是曲线的上升或者下降. 但在图 3-6-2 中, 虽然曲线都在上升或者下降, 但曲线弯曲方向不一样. 图 3-6-2(a)(d) 的弧是向上凹的曲线弧, 图 3-6-2(b)(c) 的弧是向上凸的曲线弧, 它们的凹凸性不同, 下面我们研究曲线的凹凸性及其判别方法.

从几何上观察发现, 在有的曲线上, 如果任取两点, 连接这两点的弦总位于这两点间的弧段的上方, 如图 3-6-7 所示, 则称曲线弧为向上凹的, 如果连接这两点的弦总位于这两点间的弧段的下方, 如图 3-6-8 所示, 则称曲线弧为向上凸的. 曲线的凹凸性可以用连接曲线弧上任意两点的弦的中点与曲线弧上相应点(横坐标相同的点)的位置关系来描述.

**定义 1** 设  $f(x)$  在区间  $I$  上连续, 如果对  $I$  上任意两点  $x_1, x_2$ , 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称  $f(x)$  在  $I$  上的图形是(向上)凹的(或凹弧), 如图 3-6-7 所示; 如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称  $f(x)$  在  $I$  上的图形是(向上)凸的(或凸弧), 如图 3-6-8 所示.

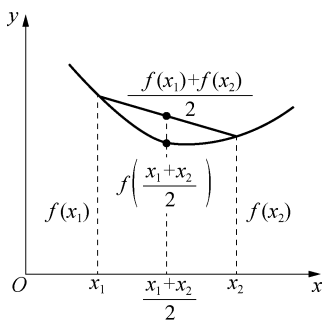


图 3-6-7

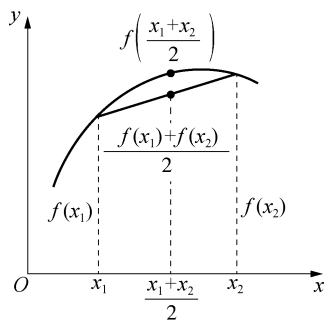


图 3-6-8

如果函数  $f(x)$  在区间  $I$  上具有二阶导数, 那么可以通过 geogebra 软件辅助探究, 发现可用二阶导数来判断曲线的凹凸性.

**定理 2** 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内具有一阶和二阶导数, 那么

- (1) 若在  $(a, b)$  内  $f''(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的图形是凹的;
- (2) 若在  $(a, b)$  内  $f''(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的图形是凸的.

**例 4** 判断曲线  $f(x) = \ln x$  的凹凸性.

**解** 因为  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ , 所以在函数  $f(x) = \ln x$  的定义域  $(0, +\infty)$  内有  $f''(x) < 0$ , 由定理可知, 曲线是凸的, 如图 3-6-9.

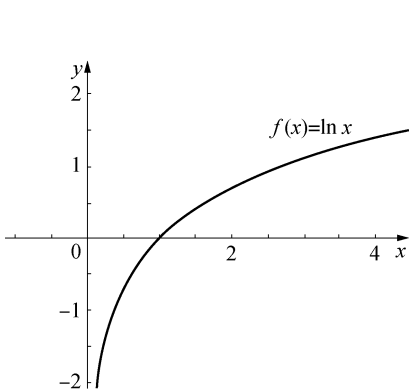


图 3-6-9

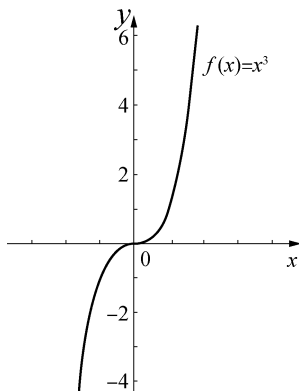


图 3-6-10

**例 5** 判断曲线  $f(x) = x^3$  的凹凸性.

**解** 因为  $f'(x) = 3x^2$ ,  $f''(x) = 6x$ . 当  $x < 0$  时,  $f''(x) < 0$ , 所以曲线在  $(-\infty, 0]$  内为凸弧; 当  $x > 0$  时,  $f''(x) > 0$ , 所以曲线在  $[0, +\infty)$  内为凹弧, 如图 3-6-10 所示.

**定义 2** 设函数  $f(x)$  在某区间内连续, 则曲线在该区间内的凹凸区间的分界点叫作

该曲线的拐点.

**说明** (1) 函数  $y=f(x)$  在  $x_0$  处的二阶导数存在, 且点  $M_0(x_0, f(x_0))$  为曲线  $y=f(x)$  的拐点, 则  $f''(x_0)=0$ .

(2) 若  $f''(x_0)=0$ , 点  $M_0(x_0, f(x_0))$  不一定是拐点, 只有在  $x_0$  两侧的二阶导数异号时, 点  $M$  才是曲线的拐点. 例如函数  $f(x)=x^4$ , 有  $f''(x)=12x^2 \geq 0$ ,  $f''(0)=0$ , 由于在  $x=0$  两侧  $f''(x)$  同号, 因此  $(0, 0)$  不是函数的拐点.

(3) 若函数在  $x_0$  处的二阶导数  $f''(x_0)$  不存在, 但在  $x_0$  两侧的二阶导数异号, 则  $M_0(x_0, f(x_0))$  也是曲线的拐点.

**例 6** 求曲线  $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$  的拐点及凹凸区间.

**解** 函数  $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ .

$$f'(x)=3x^2-12x+9, f''(x)=6x-12=6(x-2).$$

解方程  $f''(x)=0$ , 得  $x=2$ , 列表如下:

| $x$      | $(-\infty, 2)$ | 2        | $(2, +\infty)$ |
|----------|----------------|----------|----------------|
| $f''(x)$ | -              | 0        | +              |
| $f(x)$   | 凸              | 拐点(2, 4) | 凹              |

所以函数的凸区间为  $(-\infty, 2]$ , 凹区间为  $[2, +\infty)$ , 拐点为  $(2, 4)$ , 如图 3-6-11.

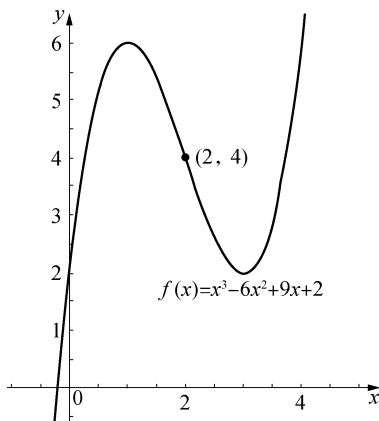


图 3-6-11

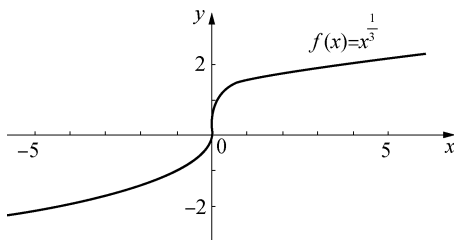


图 3-6-12

**例 7** 求曲线  $f(x)=\sqrt[3]{x}$  的拐点.

**解** 函数  $f(x)=\sqrt[3]{x}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 当  $x \neq 0$  时,

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, f''(x)=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}},$$

当  $x=0$  时,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  都不存在. 所以二阶导数在  $(-\infty, +\infty)$  内不连续且不具



有零点. 但  $x=0$  是  $f''(x)$  不存在的点, 它把区间  $(-\infty, +\infty)$  分成两个部分区间:  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, +\infty)$ .

在  $(-\infty, 0)$  内,  $f''(x) > 0$ , 曲线是凹的; 在  $(0, +\infty)$  内,  $f''(x) < 0$ , 曲线是凸的. 当  $x=0$  时,  $f(x)=0$ , 点  $(0, 0)$  是曲线的一个拐点, 如图 3-6-12 所示.

### 习题 3-6

1. 判断函数  $f(x) = x + \cos x$  的单调性.

2. 确定下列函数的单调区间.

(1)  $f(x) = 3x^2 + 6x + 5$ ;

(2)  $f(x) = x - e^x$ .

3. 证明不等式: 当  $x > 0$  时,  $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$ .

4. 判定下列曲线的凹凸性.

(1)  $f(x) = x^2 - 4x$ ;

(2)  $f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (x < 0)$ .

5. 求下列函数图形的拐点和凹凸区间.

(1)  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ ;

(2)  $f(x) = x^4$ .

## 第七节 函数的极值与最值



函数的极值

### 一、函数的极值

费马定理给出了可导函数在一点取得极值的必要条件: 函数在该点的导数为 0, 及函数的极值点必为稳定点. 例如, 如图 3-7-1, 对于函数  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ , 容易算得, 点  $x=1$  及  $x=2$  是函数  $f(x)$  的稳定点, 当点  $x$  从点  $x=1$  的左邻域变到右邻域时,  $f'(x)$  的符号由正变负, 函数值由单调递增变为单调递减, 所以  $f(1)$  是  $f(x)$  的极大值, 点  $x=1$  为其极大值点. 当点  $x$  从点  $x=2$  的左邻域变到右邻域时,  $f'(x)$  的符号由负变正, 函数值由单调递减变为单调递增, 所以  $f(2)$  是  $f(x)$  的极小值, 点  $x=2$  为其极小值点.

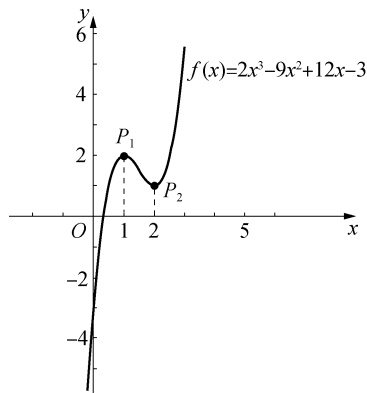


图 3-7-1

由此可以看出, 函数的极值与其导数有着密切的联系.

**定理 1 (第一充分条件)** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内可导, 并且  $f'(x_0) = 0$  (即  $x_0$  是  $f(x)$  的稳定点). 当  $x$  由小变大经过点  $x_0$  时, 有

(1) 若  $f'(x)$  的符号由正变负, 则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  取得极大值;

(2)若  $f'(x)$  的符号由负变正, 则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  取得极小值;

(3)若  $f'(x)$  的符号不变, 则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  不取极值.

**证明** 事实上, 就情形(1)来说, 根据函数单调性的判定法, 函数  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0)$  内单调增加, 在  $(x_0, x_0 + \delta)$  内单调减少, 又由于函数  $f(x)$  在  $x_0$  处是连续的, 所以当  $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$  时, 总有  $f(x) < f(x_0)$ , 因此  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的一个极大值(图 3-7-2).

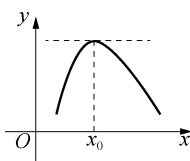


图 3-7-2

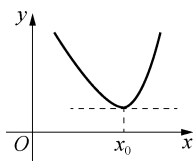


图 3-7-3

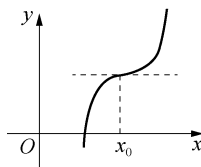


图 3-7-4

类似地可论证情形(2)(图 3-7-3)及情形(3)(图 3-7-4).

定理也可简单地这样说: 当  $x$  在  $x_0$  的邻近渐增地经过  $x_0$  时, 如果  $f'(x)$  的符号由正变负, 那么  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极大值; 如果  $f'(x)$  的符号由负变正, 那么  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极小值; 如果  $f'(x)$  的符号并不改变, 那么  $f(x)$  在  $x_0$  处没有极值.

根据上面的定理, 求可导函数  $f(x)$  的极值可以按下面的三个步骤进行:

(1)求函数  $f(x)$  的导数  $f'(x)$ ;

(2)令  $f'(x) = 0$ , 解得稳定点;

(3)判断导数  $f'(x)$  在每个稳定点两侧的符号, 再根据定理 1, 确定函数  $f(x)$  在稳定点是否取得极值, 如果取得极值, 再确定是极大值还是极小值.

**例 1** 求函数  $f(x) = (x-1)^3 \left(x + \frac{1}{3}\right)$  的极值点和极值.

**解** (1) $f'(x) = 4x(x-1)^2$ ;

(2)令  $f'(x) = 0$ , 即  $4x(x-1)^2 = 0$ , 得稳定点  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ;

(3)定义域  $(-\infty, +\infty)$  被两个稳定点分成三个区间  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, +\infty)$ , 由此列表讨论如下:

| $x$     | $(-\infty, 0)$ | 0                            | $(0, 1)$   | 1    | $(1, +\infty)$ |
|---------|----------------|------------------------------|------------|------|----------------|
| $f'(x)$ | —              | 0                            | +          | 0    | +              |
| $f(x)$  | $\searrow$     | 极小值<br>$f(0) = -\frac{1}{3}$ | $\nearrow$ | 不取极值 | $\nearrow$     |

所以,  $x_1 = 0$  是  $f(x)$  的极小值点, 极小值为  $-\frac{1}{3}$ ;  $x_2 = 1$  不是  $f(x)$  的极值点, 如图 3-7-5 所示.

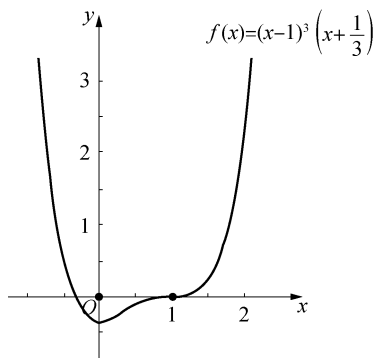


图 3-7-5

当函数  $f(x)$  在驻点(稳定点)处的二阶导数存在且不为零时, 也可以利用下列定理来判定  $f(x)$  在驻点处取得极大值还是极小值.

**定理 3 (第二充分条件)** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处具有二阶导数且  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) \neq 0$ , 那么

- (1) 当  $f''(x_0) < 0$  时, 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极大值;
- (2) 当  $f''(x_0) > 0$  时, 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极小值.

**证明** 在情形(1), 由于  $f''(x_0) < 0$ , 按二阶导数的定义有

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0.$$

根据函数极限的局部保号性, 当  $x$  在  $x_0$  的足够小的去心邻域内时, 恒有

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0.$$

但  $f'(x_0) = 0$ , 所以上式即

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0.$$

从而知道, 对于这去心邻域内的  $x$  来说,  $f'(x)$  与  $x - x_0$  符号相反. 因此, 当  $x - x_0 < 0$  即  $x < x_0$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x - x_0 > 0$  即  $x > x_0$  时,  $f'(x) < 0$ . 于是根据定理 1 知道,  $f(x)$  在点  $x_0$  处取得极大值.

类似地可以证明情形(2).

**说明** (1) 定理 3 表明, 如果函数  $y = f(x)$  在稳定点  $x_0$  处的二阶导数  $f''(x_0) \neq 0$ , 那么该稳定点  $x_0$  一定是极值点, 并且可以借助二阶导数  $f''(x_0)$  的符号来判定该点究竟是极大值点还是极小值点.

(2) 如果函数  $y = f(x)$  在稳定点  $x_0$  处的二阶导数  $f''(x_0) = 0$ , 上述定理不能应用. 事实上, 当  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) = 0$  时, 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  可能有极值, 也可能没有极值. 例如函数  $f(x) = x^2$ , 有  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 0$ ,  $x = 0$  是极小值点. 而对函数  $f(x) = x^3$ , 有  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 0$ , 但  $x = 0$  不是极值点. 此时, 需要改用极值存在的第一充分条件来进行判别.

## 二、函数的最值



在工农业生产、工程技术及科学实验中，常常会遇到这样一类问题：在一定条件下，怎样使“产品最多”“用料最省”“成本最低”“效率最高”等，这类问题在数学上有时可归结为求某一函数(通常称为目标函数)的最大值或最小值问题。

### 有限个数中找最大值和最小值



图 3-7-6

在日常生活中，如图 3-7-6 所示，要从一个班级里挑出个子最高与最矮的学生，或者到一家商店买一支最便宜和最贵的钢笔，等等，都是在有限多个数值中求最大值和最小值，而有限个数中总有最大值和最小值，根据常识，逐个比较就可以解决问题。

然而，函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  有无穷多个值，要在这无限多个数中找出最大值或最小值，和从有限个数中找最大值大不一样。

首先，在无穷多个函数值中，可能根本就不存在最大值或最小值，例如下面的函数：

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 2, \\ 1, & x = 0 \text{ 或 } x = 2. \end{cases}$$

很显然，这个函数在区间  $[1, 2]$  上不存在最大值，也不存在最小值，如图 3-7-7 所示。

其次，即使这样的最大值或最小值存在，怎样寻找呢？借助极大值和极小值的相关知识，能否找到一个较好的方法呢？

假定  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续，在开区间  $(a, b)$  内除有限个点外可导，且至多有有限个驻点。在这种条件下，我们来讨论求函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上的最值求法。

根据前面所学相关知识，知道闭区间上的连续函数必有最大值和最小值。

另外，如果最值  $f(x_0)$  在开区间  $(a, b)$  内的点  $x_0$  处取得，那么，按  $f(x)$  在开区间内除有限个点外可导，且至多有有限个驻点的假定，可知  $f(x_0)$  一定是  $f(x)$  的极值，从而  $x_0$  一定是  $f(x_0)$  的驻点或者不可导点。又因为  $f(x)$  的最值也有可能端点处取得，所以，

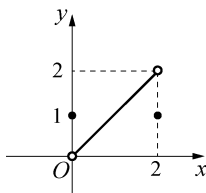


图 3-7-7

可用下面的方法求函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上的最值:

- (1) 求出函数  $f(x)$  的全部驻点以及函数  $f(x)$  的不可导点;
- (2) 算出(1)中两类点及两个端点处的所有函数值;
- (3) 将(2)中算出的所有值进行比较, 其中最大的一个是最大值, 最小的一个是最小值.

**例 2** 求函数  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$  在  $[-3, 4]$  上的最大值与最小值.

**解** 因为函数  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$  在  $[-3, 4]$  上连续, 所以存在最大值与最小值.

(1)  $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得驻点为  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$ ;

(2) 由于  $f(-2) = 34$ ,  $f(1) = 7$ ,  $f(-3) = 23$ ,  $f(4) = 142$ ;

(3) 比较得到  $f(x)$  在  $x = 4$  处取得最大值  $f(4) = 142$ , 在  $x = 1$  处取得最小值  $f(1) = 7$ .

在实际问题中, 往往根据问题的性质就可以断定可导函数  $f(x)$  确有最大值或最小值, 而且一定在定义区间内部取得. 这时如果  $f(x)$  在定义区间内部只有一个驻点  $x_0$ , 那么不必讨论  $f(x_0)$  是不是极值, 就可以断定  $f(x_0)$  是最大值或最小值.

**例 3** 要制造一个容积为  $V$  的圆柱形带盖圆桶, 试问底面半径  $r$  和桶高  $h$  应如何确定才能使所用材料最省? (图 3-7-8)

**分析** 要使得材料最省, 就是要使圆桶的表面积  $S$  最小. 因此先建立表面积  $S$  与底面圆半径  $r$  之间的函数关系.

由于  $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ ,  $V = \pi r^2 h$ , 所以

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad 0 < r < +\infty$$

问题就是求函数  $S(r)$  的最小值点. 令

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0,$$

即  $r^3 - \frac{V}{2\pi} = 0$ , 这是  $r$  的三次方程, 应该有三个根, 但只有一个实根  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$  在  $(0, +\infty)$  内, 即函数  $S(r)$  在定义区间内只有一个驻点. 根据问题的实际意义, 可知  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

是函数  $S(r)$  的最小值点.

当  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$  时,  $h = 2r$ , 即圆桶的高等于圆桶底面的直径时, 所用材料最省. 这种形状的圆柱形容器, 在日常生活中被广泛采用, 如储油罐、化学反应器、罐头盒等. 当然, 日常生活中的圆柱形容器也经常采用细长形或扁平形, 这是由美学、流行趋势、使用方便以及创造品牌等因素决定, 这恰恰表明社会生活的丰富多彩.

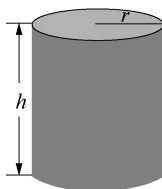


图 3-7-8

**例 4** 小学生接受新概念的能力函数为

$$f(t) = -0.1t^2 + 2.6t + 43, t \in [0, 30].$$

问  $t$  为何值时小学生学习兴趣递增或递减? 何时学习的兴趣最大?

**解**  $f'(t) = -0.2t + 2.6 = -0.2(t - 13)$ ,

令  $f'(t) = 0$ , 得到唯一驻点  $t = 13$ .

当  $t < 13$  时,  $f'(t) > 0$ ,  $f(t)$  单调增加; 当  $t > 13$  时,  $f'(t) < 0$ ,  $f(t)$  单调减少.

所以讲课开始后第 13 分钟时小学生学习兴趣最大. 在此时刻之前学习兴趣递增, 此时刻之后学习兴趣递减.

**例 5** 已知某工厂生产  $x$  件产品的成本为  $C(x) = \frac{1}{40}x^2 + 200x + 25\,000$  (元), 产

品产量  $x$  与价格的关系为  $P(x) = -\frac{1}{20}x + 440$ . 求

(1) 要使平均成本最小, 应生产多少件产品?

(2) 生产多少件产品时, 企业可获得最大利润? 并求出最大利润.

**解** (1) 平均成本

$$\begin{aligned}\bar{C}(x) &= \frac{C(x)}{x} = \frac{\frac{1}{40}x^2 + 200x + 25\,000}{x} = \frac{1}{40}x + 200 + \frac{25\,000}{x}, \\ \bar{C}'(x) &= -\frac{25\,000}{x^2} + \frac{1}{40},\end{aligned}$$

令  $\bar{C}'(x) = 0$ , 解得  $x = \pm 1\,000$  (舍去负值), 得到唯一驻点即为平均成本最小值点. 因此, 生产 1 000 件产品可使平均成本最小.

(2) 利润函数

$$\begin{aligned}L(x) &= xP(x) - C(x) = x\left(-\frac{1}{20}x + 440\right) - C(x) \\ &= x\left(-\frac{1}{20}x + 440\right) - \left(\frac{1}{40}x^2 + 200x + 25\,000\right),\end{aligned}$$

令  $L'(x) = 0$ , 得  $x = 1\,600$ , 唯一驻点即为利润最大值点.

又  $L(1\,600) = 167\,000$ .

所以, 生产 1 600 件产品时, 企业可获得最大利润 167 000 元.

**习题 3-7**

1. 下列命题正确吗, 为什么?

(1) 若  $f'(x_0) = 0$ , 则  $x_0$  必为函数  $y = f(x)$  的极值点.

(2) 若  $x_0$  为函数  $y = f(x)$  的极值点. 则必有  $f'(x_0) = 0$ .

(3) 函数的极大值必定大于其极小值 (若极值存在).

2. 驻点 (即稳定点) 是否一定为极值点? 没有驻点是否没有极值点?

3. 求函数  $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$  的极值.

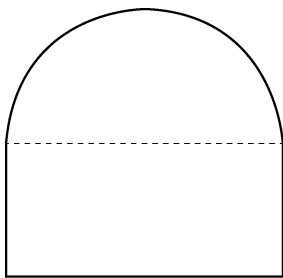
4. 求下列函数在给定区间上的最大值与最小值:

(1)  $y = x^4 - 2x^2 + 5, x \in [-2, 2]$ ; (2)  $y = \ln(x^2 + 1), x \in [-1, 2]$ .

5. 要制造一个容积为  $V$  的圆柱形无盖圆桶, 试问底面半径  $r$  和桶高  $h$  应如何确定才能使所用材料最省?

6. 把边长为  $a$  的正方形铁皮四角各剪去一个相同的正方形, 再把四边折起, 做成一个无盖方盒, 试问剪掉的小正方形的边长为多大时, 方盒的容积最大?

7. 隧道的截面是矩形加半圆, 周长是 15 米, 问矩形的底为多少时, 截面积为最大?



8. 一汽车厂正在测试新开发的汽车发动机的效率, 发动机的效率  $P(\%)$  与汽车的速度  $v$  (单位: km/h) 之间的函数关系式为  $P = 0.768v - 0.000\ 04v^3$ , 问发动机的最大效率为多少?

9. 测量某个量  $A$ , 由于仪器的精度和测量的技术等原因, 对量  $A$  做了  $n$  次测量, 测得的数据分别是

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

取数  $x$  作为量  $A$  的近似值. 试问  $x$  取何值才能使  $x$  与  $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$  之差的平方和为最小?

10. 某企业生产的一种产品的市场需求量  $D$  (件) 是其价格  $p$  (元) 的函数  $D(p) = 12\ 000 - 80p$ , 在产销平衡的情况下, 总成本函数为  $C(D) = 25\ 000 + 50D$ , 又每件产品的纳税额为 1 元. 问: 当  $p$  为多少时, 企业所获得的利润最大? 最大利润是多少?

## 第八节 函数图形的描绘

函数图形可以直观地反映函数的性态. 因此, 描绘函数的图形显得尤为重要. 在中学阶段, 我们已经掌握了用描点法绘制函数的图形, 由于它只是描绘一些孤立的点, 所以绘制出的图形常常会遗漏一些关键点. 本节, 我们将利用导数找出函数的单调区间、凹凸区间、极值点、拐点、最值点等关键信息, 并把函数的图形描绘得比较准确.

当然, 随着现代计算机技术的发展, 借助于几何画板或者 Geogebra 等数学软件可以方便地绘制出各种图形. 但是, 如何识别机器作图中的误差、如何掌握图形上的关键点、如何选择作图的范围等, 仍然需要我们有运用微分学的方法描绘函数图形的基本知识.

### 一、曲线的渐近线

在描绘函数的图形时, 函数的定义域往往是无穷区间, 要知道曲线在无穷远处的性

态,就需要借助曲线的渐近线.

**定义 1** 如果曲线  $y=f(x)$  的定义域是无穷区间且  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=b$  或  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=b$ , 则称直线  $y=b$  为曲线  $y=f(x)$  的一条水平渐近线.

例如, 当  $x \rightarrow \infty$  时, 有  $e^{-x^2} \rightarrow 0$ , 则  $y=0$  为曲线  $y=e^{-x^2}$  的水平渐近线.

**定义 2** 如果曲线  $y=f(x)$  在  $x=c$  处间断, 且  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)=\infty$  或  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)=\infty$ , 则称直线  $x=c$  为曲线  $y=f(x)$  的一条铅直渐近线.

例如, 当  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  时, 有  $\tan x \rightarrow +\infty$ , 则  $x=\frac{\pi}{2}$  为曲线  $y=\tan x$  的铅直渐近线.

## 二、函数图形的描绘

前面讨论了函数的单调性、奇偶性、极值、函数的凹凸性和拐点以及函数的渐近线, 对函数的性态有了比较全面的了解, 下面来描绘函数的图形.

一般地, 利用导数描绘函数图形的步骤如下:

第一步 确定函数的定义域;

第二步 讨论函数的周期性、奇偶性等;

第三步 求出一阶导数  $f'(x)$  和二阶导数  $f''(x)$  在函数定义域内的全部零点, 函数的间断点以及一、二阶导数不存在的点;

第四步 列表讨论, 用第三步中求得的这些点把定义域分成几个部分区间, 确定一阶导数和二阶导数在这些部分区间上的符号, 并由此确定函数图形的升降、凹凸和拐点;

第五步 确定函数图形的水平、铅直渐近线以及其他变化趋势;

第六步 算出  $f'(x)$  和  $f''(x)$  的零点以及不存在的点所对应的函数值, 定出图形上对应的点, 然后用平滑曲线描绘成图.

**例 1** 描绘函数  $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$  的图形.

**解** (1) 此函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ;

(2)  $f(x)$  既不是奇函数, 也不是偶函数, 也不是周期函数;

(3)  $f'(x)=x^2-2x$ , 令  $f'(x)=0$ , 得  $x_1=0$ ,  $x_2=2$ .

$f''(x)=2x-2$ , 令  $f''(x)=0$ , 得  $x_3=1$ .

(4) 列表(表 3-8-1)讨论:

表 3-8-1

| $x$      | $(-\infty, 0)$                                                                      | 0      | $(0, 1)$                                                                            | 1  | $(1, 2)$                                                                            | 2                  | $(2, +\infty)$                                                                        |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------|-------------------------------------------------------------------------------------|----|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $f'(x)$  | +                                                                                   | 0      | -                                                                                   | -  | -                                                                                   | 0                  | +                                                                                     |
| $f''(x)$ | -                                                                                   | -      | -                                                                                   | 0  | +                                                                                   | +                  | +                                                                                     |
| $y=f(x)$ |  | 极大值为 2 |  | 拐点 |  | 极小值为 $\frac{2}{3}$ |  |

(5) 函数无水平、铅直渐近线;



(6) 描绘图形如图 3-8-1 所示.

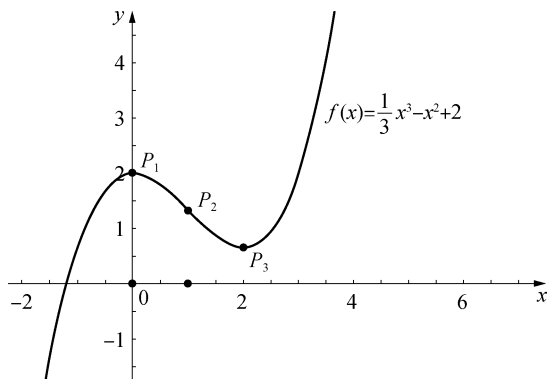


图 3-8-1

**例 2** 描绘标准正态密度函数  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  的图形. 并指出单调增区间、单调

减区间、凹凸区间、拐点.

**解** (1)  $p(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ;

(2) 函数  $p(x)$  为偶函数;

(3)  $p'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ , 令  $p'(x) = 0$ , 得驻点  $x = 0$ ,

(4) 由于  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = 0$ , 所以图形有一条水平渐近线  $y = 0$

$p''(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} (x^2 - 1)$ , 令  $p''(x) = 0$ , 得  $x = \pm 1$ . 这些点把定义域分成若干区间, 列表(表 3-8-2)讨论:

表 3-8-2

| $x$      | $(-\infty, -1)$ | $-1$ | $(-1, 0)$ | $0$ | $(0, 1)$ | $1$ | $(1, +\infty)$ |
|----------|-----------------|------|-----------|-----|----------|-----|----------------|
| $p'(x)$  | +               | +    | +         | 0   | -        | -   | -              |
| $p''(x)$ | +               | 0    | -         | -   | -        | 0   | +              |
| $p(x)$   | ↗               | 拐点   | ↘         | 极大值 | ↘        | 拐点  | ↗              |

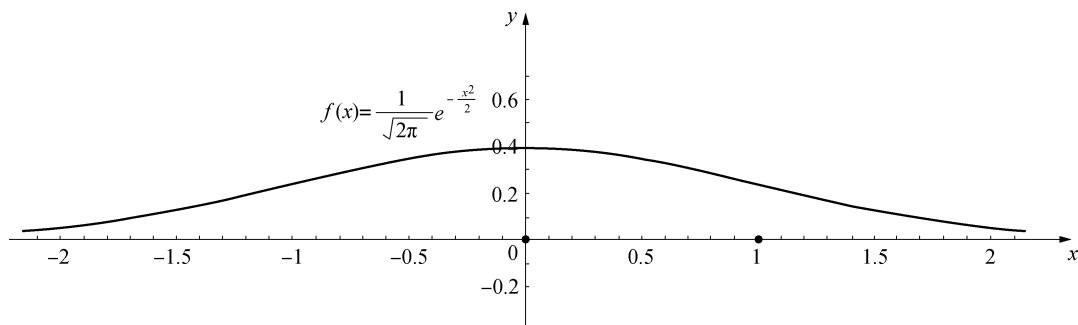


图 3-8-2

从表中可以看出,函数的增区间为 $(-\infty, 0)$ ,减区间为 $(0, +\infty)$ ;函数有唯一的极大值 $f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ,无极小值.函数的凹区间为 $(-\infty, -1)$ 、 $(1, +\infty)$ ,凸区间为 $(-1, 1)$ ;拐点为 $\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-1}\right)$ 和 $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-1}\right)$ .描绘图形如图 3-8-2 所示.

### 习题 3-8

1. 求下列曲线的渐近线.

(1)  $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ ;

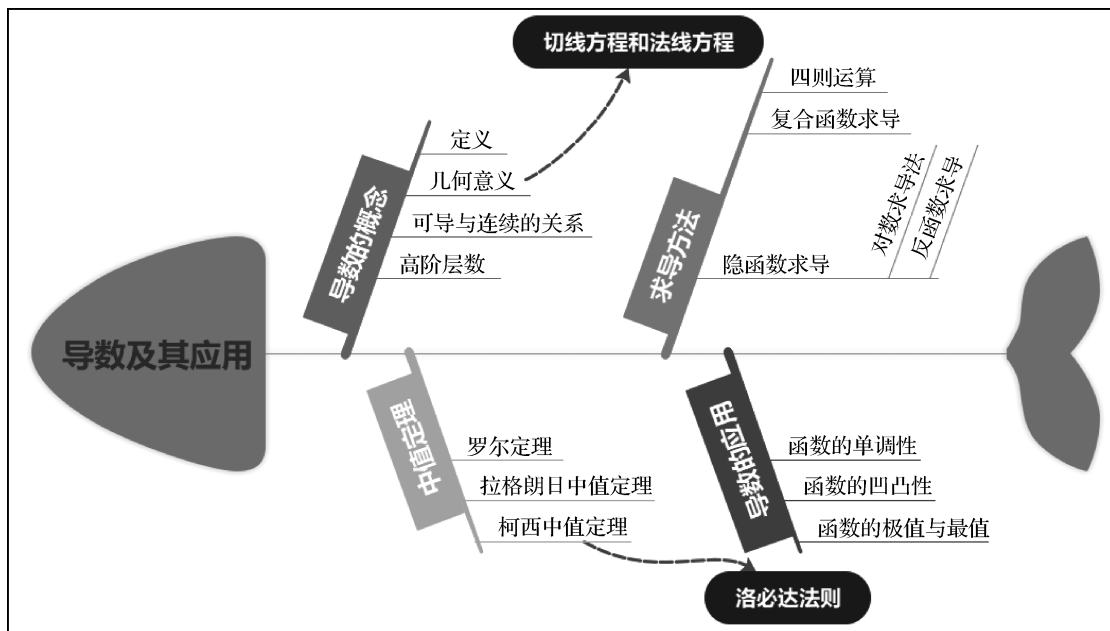
(2)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ .

2. 描绘函数  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$  的图形.

3. 描绘概率曲线  $f(x) = e^{-x^2}$  的图形.

4. 描绘函数  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$  的图形.

### 鱼骨图小结



## 总习题三

### 一、单选题

- 曲线  $y=x^3$  在点  $(2, 8)$  处的切线方程是( ).  
 A.  $6x-y-12=0$  B.  $12x-y-16=0$   
 C.  $8x-y+10=0$  D.  $12x-y-32=0$
- 设  $f(x)=\cos x^2$ , 则  $f'(x)=($  ).  
 A.  $-2x \cos x^2$  B.  $2x \cos x^2$   
 C.  $2x \sin x^2$  D.  $-2x \sin x^2$
- 设  $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-2023)(x-2024)$ , 则  $f'(0)=($  ).  
 A. 2024 B.  $2024!$   
 C. -2024 D.  $-2024!$
- 下列函数在  $x=0$  点处不可导的是( ).  
 A.  $y=\sqrt{x}$  B.  $y=\tan x$   
 C.  $y=\arccos x$  D.  $y=3^{-x}$
- 设  $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ , 且  $0<x_1<x_2<1$ , 则  $a=\frac{\sin x_1}{x_1}$ ,  $b=\frac{\sin x_2}{x_2}$  的大小关系是( ).  
 A.  $a>b$  B.  $a=b$   
 C.  $a<b$  D. 不确定
- (2019 年) 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  点处连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin 2x}=1$ , 则  $f'(0)=($  ).  
 A. 0 B. 1  
 C.  $\frac{1}{2}$  D. 2
- (2014 年) 直线  $l$  与  $x$  轴平行且与曲线  $y=x-e^x$  正切, 则切点的坐标是( ).  
 A.  $(1, 1)$  B.  $(-1, 1)$   
 C.  $(0, -1)$  D.  $(0, 1)$
- 下列结论错误的是( ).  
 A. 如果函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导  
 B. 如果函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处不连续, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  处不可导  
 C. 如果函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续  
 D. 如果函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处不可导, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  处也可能连续
- 函数  $f(x)=|x|$ , 在  $x=0$  处, 函数( ).  
 A. 没有极值 B. 有极小值

C. 有极大值

D. 不确定

10. 设函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内有  $f'(x) < 0$  且  $f''(x) < 0$ , 则  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内( ).

A. 单调增加, 图形上凹

B. 单调增加, 图形上凸

C. 单调减少, 图形上凹

D. 单调减少, 图形上凸

## 二、填空题

1. 一物体做变速直线运动, 其位移关于时间的函数为  $s(t) = t^3$ , 则其速度函数  $v(t) =$  \_\_\_\_\_.

2. 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 则  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 3\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$  \_\_\_\_\_.

3. 设  $f(x) = 3x^2 + \ln x + e$ , 则  $f'(x) \big|_{x=1} =$  \_\_\_\_\_.

4. 设方程  $x^2 + y^2 - xy = 2$  确定隐函数  $y = y(x)$ , 则  $y' =$  \_\_\_\_\_.

5. 设  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ , 则  $f'(1) =$  \_\_\_\_\_.

6.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) =$  \_\_\_\_\_.

7. 函数  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$  的单调增区间是 \_\_\_\_\_.

8. 如果函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 且在点  $x_0$  处取得极大值, 则  $f'(x_0) =$  \_\_\_\_\_.

9. 函数  $y = \arctan x$  的渐近线方程是 \_\_\_\_\_.

10. 函数  $y = xe^x$  取极小值的点是 \_\_\_\_\_.

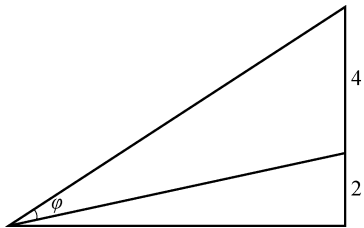
## 三、解答题

1. 讨论分段函数  $f(x) = \begin{cases} 2+x, & x \geq 0 \\ 2-x, & x < 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处的连续性和可导性.

2. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$ .

3. (2020 年) 设函数  $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + c$ , 已知曲线  $y = f(x)$  具有水平渐近线  $y=1$ , 且有拐点  $(-1, 0)$ . 试求: (1) 常数  $a, b, c$  的值; (2) 函数  $f(x)$  的单调区间与极值.

4. 电影院的银幕高为 4 米, 底边距离底面 2 米, 见下图. 试问在距离银幕多远的地方, 视角最大?



5. 绘制函数  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  的图形.

6. 一艘轮船在航行中每小时的燃料费和它的速度的立方成正比, 已知速度为 10 km/h 时, 燃料费为 6 元/h, 而其他与速度无关的费用为 96 元/h, 问轮船的速度为多少时, 航行 1 km 所需的费用总和最小?

#### 四、证明题

1. 利用单调性证明不等式: 当  $b > a > e$  时,  $a^b > b^a$ .

2. (2021 年) 当  $x > 0$  时,  $2 - \frac{e}{x} \leq \ln x \leq \frac{x}{e}$ .

3. 利用拉格朗日中值定理证明不等式:  $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ , 其中  $a > b > 0$ .

4. (2011 年) 证明方程  $x \ln(1+x^2) = 2$  有且仅有一个小于 2 的正实根.

5. 证明:  $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$ ,  $-\infty < x < \infty$ .

6. 若函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内具有二阶导数, 且  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ , 其中  $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ , 证明: 在  $(x_1, x_3)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得  $f''(\xi) = 0$ .

7. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导,  $f(a) = f(b)$ , 证明在  $(a, b)$  内必存在一点  $\xi$ , 使得  $f(a) - f(\xi) = \xi f'(\xi)$ .

## 第四章

# 融合日常生活 体会细微乐趣——函数的微分

### 课程思政元素

函数的微分包含了许多哲学思想：

1. 无限小与极限。微分的概念涉及无限小量的思想，即函数在某一点的微小变化，这引出了对无限小和极限的思考，这在数学和哲学上都是一个重要的概念。

2. 变化和连续性。微分是用来描述函数在某一点的局部变化率，因此它反映了对变化和连续性的认识。微分的概念使我们能够更好地理解和描述自然界和现实世界中的变化和连续性。

3. 局部性质与整体性质。微分的概念引出了对函数局部性质的思考，如切线、凹凸性等，这反映了人们对于局部和整体的思考，以及对于微观和宏观的关注。

4. 数学建模和描述现实世界。微分的概念是数学建模的重要工具，它使我们能够更好地描述和理解现实世界中的变化和发展，这反映了人们对于数学和现实世界之间关系的思考。

因此，函数的微分不仅仅是一种数学工具，它还包含了对于无限、变化、连续性、局部性质和数学建模的哲学思考。

高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾，即在一定条件下，直线和曲线应当是一回事。

——恩格斯

微分是数学的语言，它描述了变化的本质。

——莱布尼兹

在实际问题中，常常要计算当自变量有一微小改变时，函数相应的改变量有多大。微分是微分学的另一个基本概念，它是在解决“直”与“曲”的矛盾中产生的，通过在微小局部以直线来近似代替曲线，实现了函数的线性化。本章从导数出发引进微分概念，再介绍微分的运算以及其在近似计算中的应用。

## 第一节 微分的定义



函数的微分

## 一、微分的定义

**引例 1** 设有一个正方形的金属薄片，如果边长从  $x_0$  增加到  $x_0 + \Delta x$  时，求金属薄片的面积的增量是多少。

**解** 设金属薄片的边长为  $x$ ，其面积为  $y$ ，则  $y = x^2$ ，薄片受到温度变化的影响，面积的改变量就是自变量  $x$  在  $x_0$  处取得改变量  $\Delta x$  时，函数相应的改变量  $\Delta y$ ，即

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2$$

又因为

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0,$$

所以

$$(\Delta x)^2 = o(\Delta x),$$

于是

$$\Delta y = 2x_0 \Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0)$$

从上式可以看出， $\Delta y$  分成两部分：第一部分是  $\Delta x$  的线性函数  $2x_0 \Delta x$ ，即图 4-1-1 中两个斜线矩形的面积之和；第二部分是  $\Delta x$  的高阶无穷小，即图 4-1-1 中格子正方形的面积，与  $2x_0 \Delta x$  相比，此部分面积可忽略不计。因此，当  $\Delta x \rightarrow 0$  时， $\Delta y \approx 2x_0 \Delta x$ 。

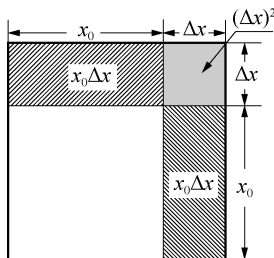


图 4-1-1

**引例 2** 求自由落体的物体由时刻  $t_0$  到  $t_0 + \Delta t$  所经过的路程的近似值。

**解** 自由落体的物体其路程与时间的关系式为  $s = \frac{1}{2}gt^2$ ，当时间从  $t_0$  到  $t_0 + \Delta t$  时，路程有如下的改变量：

$$\Delta s = \frac{1}{2}g(t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2 = gt_0 \Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2.$$

又因为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t} = 0,$$

所以

$$\frac{1}{2}g(\Delta t)^2 = o(\Delta t),$$



于是

$$\Delta s = gt_0 \Delta t + o(\Delta t) \quad (\Delta t \rightarrow 0).$$

从上式可以看出,  $\Delta s$  分成两部分: 第一部分是  $\Delta t$  的线性函数  $gt_0 \Delta t$ ; 第二部分是  $\Delta t$  的高阶无穷小, 当  $\Delta t \rightarrow 0$  时, 此部分可以忽略不计, 因此, 当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,  $\Delta s \approx gt_0 \Delta t$ .

上面两个例子, 虽然它们表示的实际意义不同, 但在数量关系上却有共同的特点: 函数的改变量可以表示成两部分, 第一部分是自变量的改变量的线性部分, 另一部分是自变量的改变量的高阶无穷小, 当自变量的改变量趋于零时, 它在函数的改变量中所起的作用很微小, 可以忽略不计. 因此函数的改变量用第一部分来近似代替.

**定义 1** 设函数  $y=f(x)$  在某区间  $I$  内有定义,  $x_0$  及  $x_0+\Delta x$  属于  $I$ . 如果函数的增量可表示为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \quad (4-1-1)$$

其中  $A$  为与  $\Delta x$  无关的常数, 则称函数  $y=f(x)$  在  $x_0$  处是可微的,  $A\Delta x$  称为函数  $y=f(x)$  在  $x_0$  处的微分, 记为  $dy$ , 即

$$dy = A\Delta x.$$

下面讨论函数可微的条件. 设函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  可微, 则按定义有式(4-1-1), 两边同除以  $\Delta x$  得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

所以, 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 由上式可得

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

因此, 如果函数  $f(x)$  在  $x_0$  处是可微, 那么函数  $f(x)$  在  $x_0$  处也一定可导.

反之, 如果函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \quad (\alpha \text{ 为 } \Delta x \rightarrow 0 \text{ 时的无穷小})$$

所以

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

而  $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$ , 且  $f'(x_0)$  不依赖于  $\Delta x$ , 所以上式相当于式(4-1-1).

因此, 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可微的充分必要条件是函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 并且, 当函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可微时, 其微分为

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \quad (4-1-2)$$

即函数在一点的微分等于它在这点的导数乘以自变量的增量.

引入微分定义之后, 有

$$\begin{cases} dy = f'(x_0)\Delta x, \\ \Delta y = dy + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0). \end{cases}$$



由此, 微分有以下两个特点:

(1) 当  $dy \neq 0$  时,  $dy$  是函数改变量  $\Delta y$  的主要部分. 因此, 当  $|\Delta x|$  很小时, 有近似公式:

$$\Delta y \approx dy.$$

(2)  $dy$  是  $\Delta x$  的线性函数. 一般情况下,  $dy$  的计算比  $\Delta y$  简单.

微分的这两个特点是微分应用的依据.

下面看自变量  $x$  的微分. 设  $y=x$ , 则

$$dx = dy = (x)' \Delta x = \Delta x,$$

即自变量的微分等于其改变量:  $dx = \Delta x$ . 因此, (4-1-2) 式改写为

$$dy = f'(x_0) dx,$$

从而

$$\frac{dy}{dx} = f'(x_0).$$

在刚开始引进导数  $\frac{dy}{dx}$  符号时, 一直把它作为一个不可分割的整体来使用. 现在,  $\frac{dy}{dx}$  就不只是导数的一个符号, 也可看做函数微分  $dy$  与自变量微分  $dx$  之商. 所以, 导数也称为微商. 由此可见, 微分与导数采用一致符号的精妙之处, 这是数学中符号美的一个杰作.

**例 1** 求函数  $y=x^2$  在  $x=1$  和  $x=2$  处的微分.

**解** 函数  $y=x^2$  在  $x=1$  处的微分为

$$dy = (x^2)' \big|_{x=1} \Delta x = 2\Delta x,$$

$y=x^2$  在  $x=2$  处的微分为

$$dy = (x^2)' \big|_{x=2} \Delta x = 4\Delta x.$$

函数  $f(x)$  在任意点的微分, 称为函数的微分, 记为  $dy$  或  $df(x)$ , 即

$$dy = f'(x) dx.$$

**例 2** 求函数  $y=x^2$  当  $x=1$ ,  $\Delta x=0.01$  时的微分.

**解** 先求函数在任意点  $x$  的微分为

$$dy = (x^2)' dx = 2x \Delta x,$$

当  $x=1$ ,  $\Delta x=0.01$  时的微分为

$$dy \bigg|_{\substack{x=1 \\ \Delta x=0.01}} = 0.02.$$

## 二、微分的几何意义

设函数  $y=f(x)$ , 当自变量  $x$  从  $x_0$  增加到  $x_0+\Delta x$ , 相应的函数增量为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx dy = f'(x_0) \Delta x$$

如图 4-1-2, 函数  $y=f(x)$  在  $x_0$  处的微分  $dy=f'(x_0)\Delta x$  为曲线  $y=f(x)$  的切线当  $x$  从



微分的几何意义及其在近似计算中的应用

$x_0$  增加到  $x_0 + \Delta x$  时的增量, 即

$$QP = MQ \cdot \tan \alpha = f'(x_0) \Delta x$$

由此可见, 对于可微函数而言, 当  $\Delta y$  是曲线  $y=f(x)$  上的点的纵坐标的增量  $QN$  时,  $dy$  就是曲线的切线  $MT$  上点的纵坐标的相应增量  $QP$ . 当  $|\Delta x|$  很小时,  $|\Delta y - dy|$  比  $|\Delta x|$  小得多. 因此在点  $M$  的邻近, 我们可以用切线段来近似代替曲线段. 这在数学上称为非线性函数的局部线性化, 这是微积分学的基本思想方法之一. 这种思想方法在自然科学和工程问题的研究中经常用到.

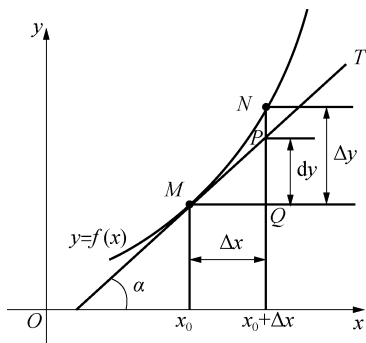


图 4-1-2

### 习题 4-1

- 在“充分”“必要”“充分必要”三者中选择一个合适的填入下列空格:  
 (1) 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处连续是函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可微的 \_\_\_\_\_ 条件, 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可微是函数  $f(x)$  在  $x_0$  处连续的 \_\_\_\_\_ 条件.  
 (2) 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导是函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可微的 \_\_\_\_\_ 条件.
- 求函数  $y=x^3$  在  $x=1$  和  $x=2$  处的微分.
- 求函数  $y=x^3$  当  $x=1$ ,  $\Delta x=0.01$  时的微分.
- 请说明微分的几何意义.

## 第二节 基本初等函数的微分公式与微分的近似计算

### 一、基本初等函数的微分公式

从函数的微分表达式

$$dy = f'(x) dx$$

可以看出, 要计算函数的微分  $dy$ , 只要求出函数的导数  $f'(x)$  再乘上自变量的微分  $dx$  即可. 因此, 可得如下的微分公式和微分运算法则.

#### 1. 基本初等函数的微分公式

为便于对照, 现将基本初等函数的导数公式和微分公式列表如下:

| 导数公式                                            | 微分公式                                               |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| $C' = 0$ ( $C$ 为常数)                             | $dC = 0$ ( $C$ 为常数)                                |
| $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ ( $\mu$ 为任意常数)       | $d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1} dx$ ( $\mu$ 为任意常数)       |
| $(\sin x)' = \cos x$                            | $d(\sin x) = \cos x dx$                            |
| $(\cos x)' = -\sin x$                           | $d(\cos x) = -\sin x dx$                           |
| $(\tan x)' = \sec^2 x$                          | $d(\tan x) = \sec^2 x dx$                          |
| $(\cot x)' = -\csc^2 x$                         | $d(\cot x) = -\csc^2 x dx$                         |
| $(\sec x)' = \sec x \tan x$                     | $d(\sec x) = \sec x \tan x dx$                     |
| $(\csc x)' = -\csc x \cot x$                    | $d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$                    |
| $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$         | $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$         |
| $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$        | $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$        |
| $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$                | $d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$                |
| $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ | $d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$ |
| $(a^x)' = a^x \ln a$                            | $d(a^x) = a^x \ln a dx$                            |
| $(e^x)' = e^x$                                  | $d(e^x) = e^x dx$                                  |
| $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$               | $d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx$               |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$                        | $d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$                        |

## 二. 函数和、差、积、商的微分公式

由函数和、差、积、商的求导法则，可推得相应的微分法则，为便于对照，列成下表（表中  $u = u(x)$ ， $v = v(x)$  都可导）

| 函数和、差、积、商的求导法则                                      | 函数和、差、积、商的微分法则                                        |
|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $(u \pm v)' = u' \pm v'$                            | $d(u \pm v) = du \pm dv$                              |
| $(Cu)' = Cu'$ ( $C$ 是常数)                            | $d(Cu) = C du$ ( $C$ 是常数)                             |
| $(uv)' = u'v + uv'$                                 | $d(uv) = v du + u dv$                                 |
| $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ | $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$ |

现在我们以乘积的微分法则为例加以证明。

根据函数微分的表达式，由

$$d(uv) = (uv)' dx,$$

又根据乘积的求导公式有

$$(uv)' = u'v + uv',$$

于是

$$d(uv) = (u'v + uv') dx,$$

由于

$$u' dx = du, \quad v' dx = dv,$$

所以

$$d(uv) = v du + u dv.$$

其余法则可以类似证明.



**例 1** 设  $y = x^3$ , 则

$$dy = (x^3)' dx = 3x^2 dx.$$



**例 2** 设  $y = \sin x \cdot \cos x$ , 则

$$dy = \cos x d\sin x + \sin x d\cos x = (\cos^2 x - \sin^2 x) dx.$$

### 三. 复合函数的微分法则

**定理** 设函数  $u = \varphi(x)$  在点  $x$  可微,  $y = f(u)$  在对应点  $u$  可微, 则复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  在点  $x$  可微, 且

$$dy = f'(u) du$$

其中  $du = \varphi'(x) dx$ .

**证明** 由微分定义及复合函数求导法则, 有

$$dy = (f[\varphi(x)])'_x dx = f'(u) \varphi'(x) dx = f'(u) du.$$

公式表明, 不论  $u$  是自变量还是中间变量, 函数的微分都有相同的形式. 这个性质称为微分形式的不变性.



**例 3** 设  $y = \cos(x^2 + 1)$ , 求  $dy$ .

**解** 把  $x^2 + 1$  看成中间变量  $u$ , 则

$$\begin{aligned} dy &= d(\cos u) = -\sin u du = -\sin(x^2 + 1) d(x^2 + 1) \\ &= -\sin(x^2 + 1) \cdot 2x dx = -2x \sin(x^2 + 1) dx. \end{aligned}$$



**例 4** 设  $y = e^{3x-1} \cos x$ , 求  $dy$ .

**解** 运用乘积的微分法则, 得

$$\begin{aligned} dy &= d(e^{3x-1} \cos x) \\ &= \cos x d(e^{3x-1}) + e^{3x-1} d(\cos x) \\ &= \cos x \cdot e^{3x-1} (3x dx) - e^{3x-1} \sin x dx \\ &= e^{3x-1} (3 \cos x - \sin x) dx. \end{aligned}$$



**例 5** 设  $y = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ , 求  $dy$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } dy &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} d(\sqrt{x^2 + 1} + x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} (d\sqrt{x^2 + 1} + dx) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx + dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

 **例 6** 在下列等式左端的括号内填入适当的函数, 使等式成立.

(1)  $d(\quad) = x^2 dx$ ;

(2)  $d(\quad) = \sin 2x dx$ .

**解** (1) 因为

$$d(x^3) = 3x^2 dx,$$

所以

$$x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3) = d\left(\frac{x^3}{3}\right),$$

即

$$d\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2 dx,$$

一般地, 有

$$d\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2 dx \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

(2) 因为

$$d(\cos 2x) = -2\sin 2x dx,$$

所以

$$\sin 2x dx = -\frac{1}{2} d(\cos 2x) = d\left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right),$$

即

$$d\left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) = \sin 2x dx,$$

一般地, 有

$$d\left(-\frac{1}{2} \cos 2x + C\right) = \sin 2x dx \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

#### 四、微分在近似计算中的应用

在工程问题中, 经常会遇到一些复杂的计算公式. 如果直接用这些公式进行计算, 那是很费力的. 利用微分往往可以把一些复杂的计算公式改用简单的近似公式来代替.

前面说过, 如果函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的导数  $f'(x_0) \neq 0$ , 且  $|\Delta x|$  很小时, 有

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0) \Delta x,$$

即

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x,$$

或

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

特别地, 取  $x_0 = 0$  时, 得到近似公式

$$f(\Delta x) \approx f(0) + f'(0)\Delta x,$$

或记为

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x.$$



**例 7**

证明: 当  $|x|$  很小时, 有近似计算公式

$$e^x \approx 1 + x.$$

**证明** 取  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$ , 则有

$$f(0) = 1, f'(0) = 1,$$

所以

$$e^x \approx 1 + x.$$



**例 8**

证明: 当  $|x|$  很小时, 有近似计算公式

$$\ln(1+x) \approx x.$$

**证明** 取  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x_0 = 0$ , 则有

$$f(0) = 0, f'(0) = 1,$$

所以

$$f(x) = \ln(1+x) \approx x.$$

同理, 可以得到一批常见的近似公式. 当  $|x|$  很小时, 有

$$\textcircled{1} \sin x \approx x;$$

$$\textcircled{2} \tan x \approx x;$$

$$\textcircled{3} \ln(1+x) \approx x;$$

$$\textcircled{4} e^x \approx 1 + x;$$

$$\textcircled{5} (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \quad (\alpha \text{ 为实数}).$$



**例 9**

求  $\sqrt{1.04}$  的近似值.

**解**  $\sqrt{1.04} = \sqrt{1+0.04}$ ,

这里  $x = 0.04$ , 其值比较小, 可以用上面的公式  $\textcircled{5}$  (取  $\alpha = \frac{1}{2}$ ), 得

$$\sqrt{1.04} = \sqrt{1+0.04} \approx 1 + \frac{1}{2} \times 0.04 = 1.02.$$

如果直接开方, 可得

$$\sqrt{1.04} \approx 1.0198.$$

比较两个结果, 以 1.02 作为  $\sqrt{1.04}$  的近似值, 其误差不超过 0.0002, 这样的近似值在一般应用上已经够精确了. 如果开方次数较高, 就更能体现出用微分进行计算的优越性.



**例 10**

一个充好气的气球, 半径为 4 m, 升空后, 因外部气压降低, 气球半径

增加了 9.9 cm, 那么气球的体积增加了多少?

**解** 已知球体体积为  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ,  $R_0 = 4$  m,  $\Delta R = 0.099$  m

体积为  $\Delta V = V(R_0 + \Delta R) - V(R_0) \approx V'(R_0)\Delta R = 4\pi R_0^2 \Delta R = 19.91(\text{m}^3)$

**例 11** 利用微分计算  $\sin 30^\circ 30'$  的近似值.

**解** 已知  $30^\circ 30' = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ ,  $\Delta x = \frac{\pi}{360}$ ,

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ 30' &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) \approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \times \frac{\pi}{360} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{360} = 0.5076\end{aligned}$$

即

$$\sin 30^\circ 30' \approx 0.5076.$$

## 习题 4-2

1. 分别求出函数  $y = x^3 - 2x + 1$  当  $x = 1$ ,  $\Delta x$  分别取 0.1, 0.01, 0.001 时的改变量  $\Delta y$  和微分  $dy$ , 并加以比较. 能否得到“当  $\Delta x$  越小时, 两者越接近”的结论?

2. 求下列各函数的微分:

- |                               |                              |
|-------------------------------|------------------------------|
| (1) $y = 3x^3 + x^2$ ;        | (2) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ ;   |
| (3) $y = \ln(\ln x)$ ;        | (4) $y = \sin(\sin x)$ ;     |
| (5) $y = e^x \arctan x + 1$ ; | (6) $y = \arccos \sqrt{x}$ . |

3. 设  $u, v$  是  $x$  的可微函数, 求下列函数的微分:

- |                              |                     |
|------------------------------|---------------------|
| (1) $y = \sqrt{u^2 + v^2}$ ; | (2) $y = e^{u+v}$ . |
|------------------------------|---------------------|

4. 若  $|x|$  很小时, 证明下列近似公式:

- |                                                |                                     |
|------------------------------------------------|-------------------------------------|
| (1) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x$ ; | (2) $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ . |
|------------------------------------------------|-------------------------------------|

5. 利用微分, 求下列各项的近似值:

- |                   |                       |
|-------------------|-----------------------|
| (1) $(1.01)^8$ ;  | (2) $\sqrt[3]{996}$ ; |
| (3) $e^{0.025}$ ; | (4) $\ln 1.01$ .      |

6. 将适当的函数填入下列括号内, 使等式成立:

- |                              |                                     |
|------------------------------|-------------------------------------|
| (1) $d(\quad) = 2dx$ ;       | (2) $d(\quad) = 4x dx$ ;            |
| (3) $d(\quad) = \sin t dt$ ; | (4) $d(\quad) = \sin 3t dt$ ;       |
| (5) $d(\quad) = e^{3x} dx$ ; | (6) $d(\quad) = \frac{1}{1+x} dx$ . |

7. 正方体的棱长  $x = 1$  m, 如果棱长增长 0.01 m, 求此正方体体积增大的精确值与近似值.

8. 一平面圆环形, 其内半径为 10 cm, 宽为 0.01 cm, 求此圆环面积的精确值与近

似值.

### ※ 第三节 曲 率

在工程技术中,经常要研究道路的转弯(图 4-3-1)、桥梁或隧道的拱形、齿轮的轮廓等曲线的形状,这就要求研究曲线弯曲的程度,为此,先介绍弧微分的概念.



图 4-3-1

#### 一、弧微分公式

如图 4-3-2 所示,在连续光滑的曲线  $y = f(x)$  上取定点  $M_0(x_0, y_0)$  作为度量曲线弧长的起点,  $M(x, y)$  为曲线弧上任意一点,规定依  $x$  增大的方向作为曲线弧的正方向,用  $s$  表示曲线弧  $\overline{M_0M}$  的长度,即  $s = s(x) = \overline{M_0M}$ .

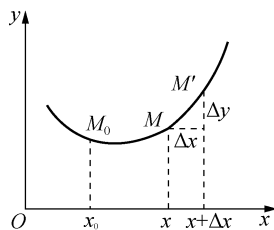


图 4-3-2

当自变量从点  $x$  取得增量  $\Delta x$  时,对应弧长的改变量为

$$\Delta s = \overline{M_0M'} - \overline{M_0M} = \overline{MM'},$$

因此,当  $\Delta x > 0$  时,  $\Delta s > 0$ ,  $\Delta x < 0$  时,  $\Delta s < 0$ .

于是

$$\begin{aligned} \frac{\Delta s}{\Delta x} &= \frac{\overline{MM'}}{\Delta x} = \frac{\overline{MM'}}{|\overline{MM'}|} \cdot \frac{|\overline{MM'}|}{\Delta x} = \frac{\overline{MM'}}{|\overline{MM'}|} \cdot \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x} \\ &= \frac{\overline{MM'}}{|\overline{MM'}|} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \end{aligned} \quad (4-3-1)$$

其中  $|\overline{MM'}|$  为弦  $\overline{MM'}$  的长度.

设  $y = f(x)$  具有一阶连续导数,当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $M'$  沿曲线弧趋于  $M$ , 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overline{MM'}}{|\overline{MM'}|} = 1,$$

对式 4-3-1 两端取  $\Delta x \rightarrow 0$  时的极限,有

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overline{MM'}}{|\overline{MM'}|} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + (y')^2},$$

从而



$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad (4-3-2)$$

这就是弧微分公式.

**例 1** 求曲线  $y = \ln(1-x^2)$  的弧微分.

**解** 当  $x \in (-1, 1)$  时, 有

$$y' = \frac{-2x}{1-x^2}, \quad (y')^2 = \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}.$$

所求的弧微分为

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} dx = \frac{1+x^2}{1-x^2} dx.$$

## 二、曲率及其计算公式

直觉告诉我们: 直线不弯曲, 半径较小的圆弯曲得比半径较大的圆厉害些, 有些曲线不同的部分有不同的弯曲程度, 比如抛物线  $y = x^2$  在顶点附近弯曲得比远离顶点部分厉害些. 那么曲线的弯曲程度与哪些量有关呢?

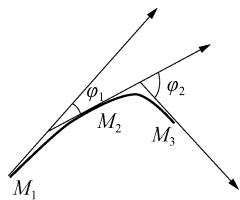


图 4-3-3

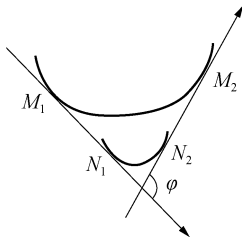


图 4-3-4

如图 4-3-3, 可以看出弧段比较平直, 当动点沿着曲线弧从点  $M_1$  移到点  $M_2$  时, 切线转过的角  $\varphi_1$  不大, 而弧段弯曲得比较厉害, 当动点沿着曲线弧从点  $M_2$  移到点  $M_3$  时, 切线转过的角  $\varphi_2$  就比较大.

但是, 切线绕过的角度大小还不能完全反映曲线弯曲的程度. 如图 4-3-4, 尽管两段弧  $\overline{M_1M_2}$  及  $\overline{N_1N_2}$  切线绕过的角度都是  $\varphi$ , 然而弯曲程度并不相同, 短弧段  $\overline{N_1N_2}$  比长弧段  $\overline{M_1M_2}$  弯曲得厉害些. 由此可见, 曲线弧的弯曲程度还和弧段的长度有关.

由此, 我们引入曲率概念来形容曲线弯曲程度.

**定义 1** 曲线弧是光滑的(当曲线上每一点都有切线, 且切线随切点的移动而连续转动, 这样的曲线称为光滑曲线), 如图 4-3-5, 在曲线上选定点  $M_0$  作为度量弧的基点. 设曲线上  $M$  点对应于弧  $s$ , 在点  $M$  处切线的倾斜角为  $\alpha$ , 曲线上另外一点  $M'$  对应于弧  $s + \Delta s$ , 在点  $M'$  处切线的倾斜角为  $\alpha + \Delta\alpha$ , 则弧段  $\overline{MM'}$  的长度为  $|\Delta s|$ , 当动点从点  $M$  移动到点  $M'$  时, 切线绕过的角度为  $|\Delta\alpha|$ , 称比值  $\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}$

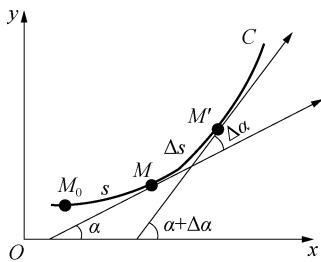


图 4-3-5

为曲线弧的平均曲率, 记为  $\bar{K}$ .

类似于从平均速度引进瞬时速度的方法, 当  $\Delta s \rightarrow 0$  时, 上述平均曲率的极限叫作曲线  $C$  在点  $M$  处的曲率, 记为  $K$ , 即

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \alpha|}{|\Delta s|}.$$

在  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \alpha|}{|\Delta s|} = \frac{|\mathrm{d}\alpha|}{|\mathrm{d}s|}$  存在的条件下, 可以表示成

$$K = \left| \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \right|.$$

对于直线来说, 切线与直线本身重合, 所以当点沿直线移动时, 切线的倾斜角  $\alpha$  不变, 从而有  $\Delta \alpha = 0$ ,  $\frac{|\Delta \alpha|}{|\Delta s|} = 0$ , 从而  $K = \left| \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \right| = 0$ , 即直线上任意点处的曲率为零.

 **例 2** 求圆周  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$  上任意一点处的曲率.

**解** 设  $M(x, y)$  为圆周上任意一点, 则根据弧长、半径和圆心角的关系有

$$\Delta s = R \cdot \Delta \alpha,$$

所以

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \alpha|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{R} = \frac{1}{R}.$$

即圆周上各点处的曲率相同, 都等于该圆半径的倒数.

在一般情况下, 如何计算曲率呢?

设函数  $y = f(x)$  具有二阶导数, 曲线  $y = f(x)$  在点  $M(x, f(x))$  处的切线的倾斜角  $\alpha$  满足

$$y' = \tan \alpha, \quad \alpha = \arctan y',$$

因此

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{y''}{1 + (y')^2} \mathrm{d}x.$$

又

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + (y')^2} \mathrm{d}x.$$

所以曲线  $y = f(x)$  在点  $M(x, f(x))$  处的曲率为

$$K = \frac{|\mathrm{d}\alpha|}{|\mathrm{d}s|} = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

### 三、曲率圆

神舟六号飞船发射后需要变轨, 在变轨的节点处就涉及曲率圆问题. 如图 4-3-6, 如果曲线  $y = f(x)$  上的点  $M$  处的曲率  $K \neq 0$ , 则称曲率  $K$  的倒数为曲线在点  $M$  处的曲率半径, 记为  $\rho$ , 即

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}. \quad (4-3-3)$$

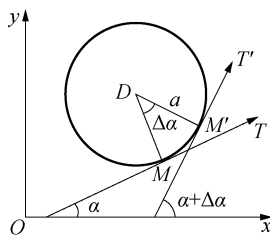


图 4-3-6

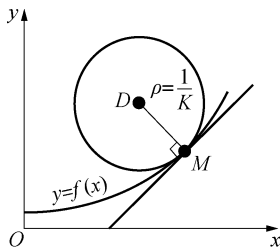


图 4-3-7

当  $K \neq 0$  时, 过曲线上的点  $M$  作曲线的法线, 在法线上沿曲线凹的一侧取点  $D$ , 使得  $|MD| = \frac{1}{K} = \rho$ , 以  $D$  为圆心, 以  $\rho$  为半径作圆, 则称此圆为曲线  $y=f(x)$  在点  $M$  处的曲率圆, 曲率圆的圆心  $D$  为曲线  $y=f(x)$  在点  $M$  处的曲率中心. 如图 4-3-7.

**例 3** 试判定抛物线  $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ ) 上哪一点处的曲率半径最小, 并指出这一点.

**解** 因为

$$y' = 2ax + b, \quad y'' = 2a,$$

所以

$$\rho = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{[1 + (2ax + b)^2]^{\frac{3}{2}}}{|2a|}$$

所以当  $x = -\frac{b}{2a}$  时,  $\rho_{\min} = \frac{1}{2|a|}$ . 曲线上相应的点为  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ . 这就是说, 抛物线顶点处的曲率圆半径最小, 即曲率最大. 也就是说抛物线的顶点处弯曲程度最大.

**例 4** 设工件内表面的截线为抛物线  $y=0.4x^2$ , 现在要用砂轮磨削其内表面. 问用直径多大的砂轮才比较合适?

**解** 为了磨削时不使砂轮与工件接触处附件的那部分工件磨去太多, 砂轮的半径应不大于抛物线上各点处曲率半径中的最小值. 由例 3 知道, 抛物线在其顶点处的曲率最大. 也就是说, 抛物线在其顶点处的曲率半径最小. 见图 4-3-8.

因此, 只要求出抛物线  $y=0.4x^2$  在顶点  $O(0, 0)$  处的曲率半径. 由

$$y' = 0.8x, \quad y'' = 0.8,$$

再根据公式(4-3-3), 得

$$\rho = 1.25.$$

所以选用砂轮的半径不得超过 1.25 单位长, 即直径不得超过 2.50 单位长.

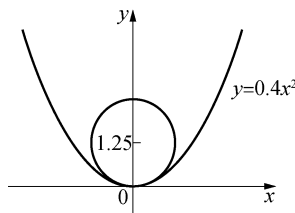


图 4-3-8

## 习题 4-5

1. 求下列曲线的弧微分：

(1)  $y = x^2 + x$ ;

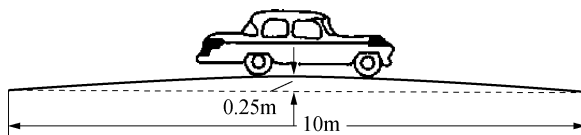
(2)  $y = \sin x$ .

2. 求曲线  $y = \sqrt{x}$  在点  $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right)$  处的曲率.

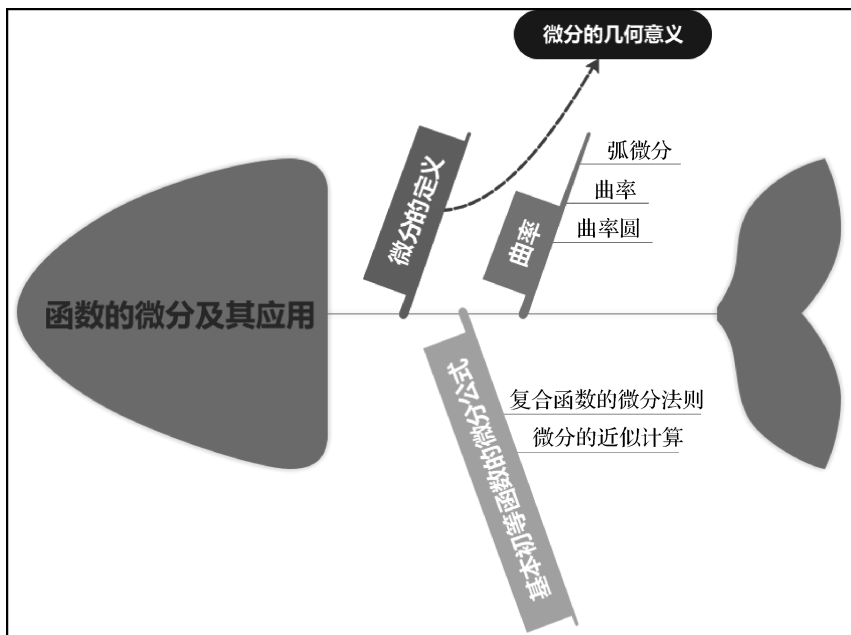
3. 求等边双曲线  $xy = 1$  在点  $(1, 1)$  处的曲率.

4. 汽车连同载重共 5t, 在抛物线拱桥上行驶, 速度为 21.6km/h, 桥的跨度为 10m, 拱的高度为 0.25m, 求汽车越过桥顶时对桥的压力.

(提示: 离心力公式  $F_{\text{离}} = \frac{mv^2}{R}$ , 其中  $R$  为曲率半径.)



## 鱼骨图小结



## 总习题四

### 一、单选题

1. 设  $y=2^{\sin x}$ , 则  $dy=(\quad)$ .  
 A.  $2^{\sin x} \ln 2 dx$  B.  $2^{\sin x} dx$   
 C.  $y=2^{\sin x} \cos x \ln 2 dx$  D.  $-2^{\sin x} \cos x \ln 2 dx$
2.  $d(\quad)=x dx$  ( $C$  为任意常数)  
 A.  $x+C$  B.  $\frac{x^2}{2}+C$  C.  $\frac{x^3}{3}+C$  D.  $\frac{x^4}{4}+C$
3. 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  可微是函数  $f(x)$  在点  $x_0$  可导的( $\quad$ ).  
 A. 充分条件 B. 必要条件  
 C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件
4.  $\sqrt{1.05}$  的近似值为( $\quad$ ).  
 A. 1.25 B. 1.025 C. 1.002 5 D. 1.000 25
5. 圆  $x^2+y^2=4$  上任意一点处的曲率为( $\quad$ ).  
 A. 2 B. 0.5 C. 4 D. 0.25

### 二、填空题

1. (2017 年) 设函数  $y=f(x)$  的微分为  $dy=e^{2x} dx$ , 则  $f''(x)=$ \_\_\_\_\_.
2. 设  $y=e^x \ln x$ , 则  $dy=$ \_\_\_\_\_.
3. (2011 年) 设函数  $y=\arctan \sqrt{x}$ , 则  $dy|_{x=1}=$ \_\_\_\_\_.
4. 函数  $f(x)=x^2+x$  在  $x=1$ ,  $\Delta x=0.001$  的微分是\_\_\_\_\_.
5. 椭圆  $x^2+\frac{y^2}{4}=1$  在  $(0, 2)$  点处的曲率为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

1. 某公司生产一种医疗设备, 如果全部出售, 收入函数为  $R=36x-\frac{x^2}{20}$  ( $x$  为日产量, 单位为台). 如果设备的日产量从 250 台增加到 260 台, 请估计该公司每天收入的增加量.
2. 若一笔钱存入银行的年复利为  $i\%$ , 则当  $i\%$  很小时, 大约需要  $\frac{70}{i}$  年后本利和可以翻倍. 例如, 年利率为  $7\%$ , 则 10 年后的本利和就是最初存款的两倍. 试对此进行证明.
3. 半径为 20 cm 的球, 如果半径增加 2 mm, 球的体积约增大多少?
4. 求曲线  $y=\cos x+e^x$  的弧微分.
5. 求抛物线  $y=x^2-4x+1$  在其顶点处的曲率及曲率半径.

## 探寻规则变幻 追求完美卓越——不定积分

## 课程思政元素

不定积分是导数的逆运算，学会运用逆向思维思考问题。逆向思维可以帮助我们打破常规思维模式，寻找新的解决问题的方法。在数学和科学领域，逆向思维可以用于解决复杂的问题。例如，当我们面临一个复杂的数学证明问题时，可以从所需的结论出发，然后反向推导，找出证明的途径。在工程领域，逆向思维可以用于解决设计问题，例如从期望的产品功能出发，然后反向设计出实现这些功能的机制。

学习数学要多做练习题，边做边思考，先知其然，然后知其所以然。

——苏步青

自然界这部伟大的书是用数学语言写成的。

——伽利略

由已知路程求速度、已知曲线求其切线方程以及求函数的增量等问题产生了导数和微分，它们和中值定理以及导数的应用构成了一元函数微分学。而已知速度求路程、已知曲线的切线方程求曲线等问题则产生了不定积分，不定积分和后面一章的定积分构成了一元函数积分学。微分学和积分学有着密切的联系，积分与微分互为逆运算。本章将介绍不定积分的概念和几种基本积分法。



不定积分的概念

## 第一节 不定积分的概念

## 一、原函数

在微分学中，我们讨论了求一个已知函数的导数(或微分)的问题，例如，变速直线运动中已知位移函数为

$$s=s(t),$$

则质点在时刻  $t$  的瞬时速度表示为

$$v(t) = s'(t).$$

实际上, 在运动学中常常遇到相反的问题, 即已知变速直线运动的质点在时刻  $t$  的瞬时速度

$$v = v(t),$$

要求质点的位移函数

$$s = s(t).$$

在数学上, 这个问题就是找一个函数  $s = s(t)$ , 使其导数  $s'(t)$  等于已知函数  $v(t)$ , 这种已知一个函数的导数, 求原来的函数(我们称之为原函数)的问题, 就是求导的逆问题. 这种问题在自然科学和工程技术问题中普遍存在. 为了便于研究, 我们引入原函数的概念.

**定义 1** 如果在区间  $I$  上, 可导函数  $F(x)$  的导函数为  $f(x)$ , 即对任一  $x \in I$ , 都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx,$$

那么函数  $F(x)$  就称为  $f(x)$  在区间  $I$  上的一个原函数.

例如, 在变速直线运动中  $s'(t) = v(t)$ , 所以位移函数  $s(t)$  是速度函数  $v(t)$  的原函数.

又如  $(\sin x)' = \cos x$ , 所以  $\sin x$  是  $\cos x$  的一个原函数. 又因为对于任何常数  $C$ ,  $(\sin x + C)' = \cos x$ , 所以  $\sin x + C$  都是  $\cos x$  的原函数.

关于原函数, 我们思考如下几个问题:

第一, 一个函数具备什么样的条件, 就一定存在原函数?

关于这个问题, 我们先给出一个充分条件.

**定理 1(原函数存在定理)** 如果函数  $f(x)$  在区间  $I$  上连续, 那么在区间  $I$  上一定存在可导函数  $F(x)$ , 使对任一  $x \in I$ , 都有

$$F'(x) = f(x).$$

简言之, 连续函数一定有原函数. 由于初等函数在其定义区间上都是连续函数, 所以初等函数在其定义区间上都有原函数.

定理 1 的证明略.

第二, 如果存在原函数, 则原函数有多少个?

若  $F'(x) = f(x)$ , 则对于任意常数  $C$ ,  $F(x) + C$  都是  $f(x)$  的原函数. 也就是说, 一个函数如果存在原函数, 则有无穷多个.

第三, 如果  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 那么  $f(x)$  的其他原函数与  $F(x)$  有什么样的关系?

设  $\Phi(x)$  是  $f(x)$  的另一个原函数, 即

$$\Phi'(x) = f(x),$$

于是,

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

根据拉格朗日中值定理的推论, 知道

$$\Phi(x) - F(x) = C \quad (C \text{ 为常数})$$

这表明一个函数的任意两个原函数之间相差一个常数.

因此, 我们得到一个重要的结论: 如果函数  $f(x)$  存在一个原函数  $F(x)$ , 那么它就有无穷多个原函数. 当  $C$  为任意的常数时, 表达式

$$F(x) + C$$

就可以表示任意一个原函数.

由此, 我们引进下述定义:

## 二、不定积分

**定义 2** 如果  $F(x)$  是  $f(x)$  在区间  $I$  上的一个原函数, 则  $f(x)$  的全体原函数  $F(x) + C$  ( $C$  为任意常数) 称为  $f(x)$  在区间  $I$  上的不定积分, 记为  $\int f(x) dx$ , 即

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

其中“ $\int$ ”称为积分号,  $f(x)$  称为被积函数,  $f(x) dx$  称为被积表达式,  $x$  称为积分变量,  $C$  称为积分常数.

由定义可知, 求  $f(x)$  的不定积分  $\int f(x) dx$ , 就是求  $f(x)$  的全体原函数, 因此, 只需要求出  $f(x)$  的一个原函数, 再加上任意的常数  $C$  即可.

 **例 1** 求  $\int 3x^2 dx$ .

**解** 因为  $(x^3)' = 3x^2$ , 所以  $x^3$  是  $3x^2$  的一个原函数. 因此

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

 **例 2** 求  $\int \cos x dx$ .

**解** 因为  $(\sin x)' = \cos x$ , 所以  $\sin x$  是  $\cos x$  的一个原函数. 因此

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

 **例 3** 求  $\int \frac{1}{x} dx$ .

**解** 由于  $x > 0$  时,  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ , 所以  $\ln x$  是  $\frac{1}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上的一个原函数, 因此在  $(0, +\infty)$  内,  $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ .

又当  $x < 0$  时,  $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$ , 所以  $\ln(-x)$  是  $\frac{1}{x}$  在  $(-\infty, 0)$  上的一个原函数, 因此在此在  $(-\infty, 0)$  内,  $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$ .

综上,  $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$ .





**例 4**

在自由落体运动中, 已知物体下落的时间为  $t$ , 求  $t$  时刻的下落速度和下落距离.

**解** 设  $t$  时刻的下落速度为  $v = v(t)$ , 则加速度  $a(t) = \frac{dv}{dt} = g$  (其中  $g$  为重力加速度).

因此

$$v(t) = \int a(t) dt = \int g dt = gt + C,$$

又当  $t=0$  时,  $v(0)=0$ , 所以  $C=0$ . 于是下落速度  $v(t)=gt$ .

又设下落距离为  $s = s(t)$ , 则  $\frac{ds}{dt} = v(t)$ . 所以

$$s(t) = \int v(t) dt = \int gt dt = \frac{1}{2}gt^2 + C,$$

又当  $t=0$  时,  $s(0)=0$ , 所以  $C=0$ . 于是下落距离  $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ .

### 三、不定积分的几何意义

设函数  $f(x)$  是连续的, 若  $F'(x) = f(x)$ , 则称曲线  $y = F(x)$  是函数  $f(x)$  的一条积分曲线. 因此不定积分  $\int f(x) dx = F(x) + C$  在几何上表示被积函数的一族积分曲线.

积分曲线族具有如下特点(图 5-1-1):

(1) 积分曲线族中任意一条曲线都可由其中某一条平移得到;

(2) 积分曲线上在横坐标相同的点处的切线的斜率是相同的, 即在那些点处对应的切线都是平行的.

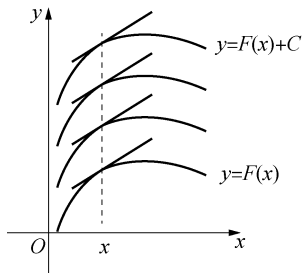


图 5-1-1

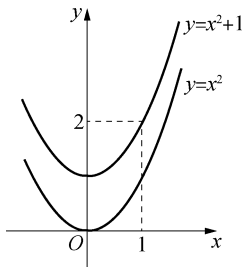


图 5-1-2



**例 5**

设曲线通过点  $(1, 2)$ , 且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍, 求此曲线方程.

**解** 设曲线方程  $y = f(x)$ , 曲线上任一点  $(x, y)$  处切线的斜率  $\frac{dy}{dx} = 2x$ , 即  $f(x)$  是

$2x$  的一个原函数. 因为  $\int 2x dx = x^2 + C$ , 所以  $f(x) = x^2 + C$ , 又曲线过  $(1, 2)$ , 故

$$2 = 1 + C, C = 1.$$

于是曲线方程为

$$y = x^2 + 1.$$

具体如图 5-1-2 所示.



不定积分的基本  
公式和性质

#### 四、基本积分公式

由定义可知, 求原函数或不定积分与求导数或求微分互为逆运算, 我们把求不定积分的运算称为积分运算. 既然积分运算与微分运算是互逆的, 那么很自然地由导数公式可以得到相应的积分公式.

例如, 因  $\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)' = x^{\mu}$ , 所以

$$\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1).$$

类似可以得到其他积分公式, 下面一些积分公式称为基本积分公式.

$$\textcircled{1} \int k dx = kx + C \quad (k \text{ 是常数});$$

$$\textcircled{2} \int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1);$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$\textcircled{4} \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\textcircled{5} \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\textcircled{6} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$$

$$\textcircled{7} \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

$$\textcircled{8} \int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$$

$$\textcircled{9} \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$$

$$\textcircled{10} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C, \int -\frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arccot} x + C;$$

$$\textcircled{11} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C;$$

$$\textcircled{12} \int e^x dx = e^x + C;$$

$$\textcircled{13} \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

以上 13 个基本积分公式, 是求不定积分的基础, 必须牢记. 下面举例说明积分公式 ② 的应用.

 **例 6** 求不定积分  $\int x^2 \sqrt{x} dx$ .

$$\text{解} \quad \int x^2 \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C.$$

以上例子中的被积函数化成了幂函数  $x^\mu$  的形式, 然后直接应用幂函数的积分公式 ② 求出不定积分. 但对于某些形式复杂的被积函数, 如果不能直接利用基本积分公式求解, 则可以结合不定积分的性质和基本积分公式求出一些较为复杂的不定积分.

## 五、不定积分的性质

根据不定积分的定义, 可以推得它有如下两个性质.

**性质 1** 积分运算与微分运算互为逆运算

$$(1) \left[ \int f(x) dx \right]' = f(x) \text{ 或 } d \left[ \int f(x) dx \right] = f(x) dx.$$

$$(2) \int F'(x) dx = F(x) + C \text{ 或 } \int dF(x) = F(x) + C$$

**性质 2** 设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  的原函数存在, 则

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

易得性质 2 对于有限个函数都是成立的.

**性质 3** 设函数  $f(x)$  的原函数存在,  $k$  为非零的常数, 则

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$$

由以上两条性质, 得出不定积分的**线性运算性质**如下:

$$\int [k f(x) + l g(x)] dx = k \int f(x) dx + l \int g(x) dx.$$

 **例 7** 求  $\int \left( \frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \left( \frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx &= 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx - 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 3 \arctan x - 2 \arcsin x + C. \end{aligned}$$

 **例 8** 求  $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx$ .

$$\text{解} \quad \text{原式} = \int \frac{(1+x^2)+x}{x(1+x^2)} dx = \int \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \ln |x| + \arctan x + C.$$

 **例9** 求  $\int 2^x e^x dx$ .

**解** 原式  $= \int (2e)^x dx = \frac{1}{\ln 2e} (2e)^x + C = \frac{2^x e^x}{1 + \ln 2} + C$ .

 **例10** 求  $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx$ .

**解** 
$$\int \frac{1}{1 + \sin x} dx = \int \frac{1 - \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} dx = \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx = \tan x - \sec x + C.$$

 **例11** 求  $\int \tan^2 x dx$ .

**解** 
$$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C.$$

**注** 本节例题中的被积函数在积分过程中, 要么直接利用积分性质和基本积分公式, 要么将函数恒等变形再利用积分性质和基本积分公式, 这种方法称为基本积分法. 此外, 积分运算的结果是否正确, 可以通过它的逆运算(求导)来检验, 如果它的导函数等于被积函数, 那么积分结果是正确的, 否则是错误的.

下面再看一个抽象函数的例子:

 **例12** 设  $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$ , 求  $f(x)$ .

**解** 由  $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ , 可得  $f'(x) = 1 - x$ , 从而

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

### 习题 5-1

1. 求下列不定积分.

(1)  $\int \frac{1}{x^4} dx$ ;

(2)  $\int x \sqrt[3]{x} dx$ ;

(3)  $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$ ;

(4)  $\int (ax^2 - b) dx$ ;

(5)  $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ ;

(6)  $\int \frac{x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} dx$ ;

(7)  $\int \frac{x^2 + x\sqrt{x} + 3}{\sqrt[3]{x}} dx$ ;

(8)  $\int \left( \frac{2}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$ ;

(9)  $\int \left( 2e^x - \frac{3}{x} \right) dx$ ;

(10)  $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$ ;

(11)  $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$ ;

(12)  $\int \tan^2 x dx$ ;

$$(13) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx;$$

$$(14) \int \frac{\cos 2x dx}{\cos x - \sin x};$$

$$(15) \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx;$$

$$(16) \int \sec x (\sec x + \tan x) dx;$$

$$(17) \int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx;$$

$$(18) \int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx.$$

2. 已知某产品产量的变化率是时间  $t$  的函数,  $f(t) = at + b$  ( $a, b$  为常数). 设此产品的产量函数为  $p(t)$ , 且  $p(0) = 0$ , 求  $p(t)$ .

3. 验证  $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \arcsin(2x-1) + C_1 = \arccos(1-2x) + C_2 = 2\arctan \sqrt{\frac{x}{1-x}} + C_3$ .

4. 设  $\int f'(x^3) dx = x^3 + C$ , 求  $f(x)$ .

5. 美丽的冰域常年结冰, 滑雪场完全靠自然结冰, 结冰的速度由  $\frac{dy}{dt} = v(t) = kt^{\frac{2}{3}}$  ( $k > 0$  为常数) 确定, 其中  $y$  是从开始结冰起到时刻  $t$  时的厚度, 求结冰厚度  $y$  关于时间  $t$  的函数式.

## 第二节 不定积分的第一类换元积分法



第一类换元积分法

前面介绍了利用基本积分公式与积分性质的直接积分法, 这种方法所能计算的不定积分是非常有限的. 如下述不定积分

$$\int \cos 2x dx, \int \frac{1}{1+x} dx, \int x e^{-x^2} dx$$

都无法直接求出. 因此, 有必要进一步研究不定积分的求法. 这一节, 我们将介绍不定积分的最基本也是最重要的方法——换元积分法, 简称换元法. 其基本思想是: 利用变量替换, 使得被积表达式变形为基本积分公式中的形式, 从而计算不定积分.

换元法通常分为两类, 下面首先讨论第一类换元积分法.

先看上面例子的  $\int \cos 2x dx$ , 在基本积分表里只有  $\int \cos x dx = \sin x + C$ . 如果生搬硬套, 得出  $\int \cos 2x dx = \sin 2x + C$ , 这是错误的, 这是因为

$$(\sin 2x + C)' = 2\cos 2x \neq \cos 2x.$$

但如果对被积函数作如下变形:

$$\begin{aligned} \int \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x) \quad (\text{令 } u = 2x) \\ &= \frac{1}{2} \int \cos u du \quad (\text{由基本积分公式}) \\ &= \frac{1}{2} \sin u + C \quad (\text{代回 } u = 2x) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

由  $\left(\frac{1}{2} \sin 2x + C\right)' = \cos 2x$  知上述计算正确. 这种方法就是第一类换元积分法

**定理 1 (第一类换元积分法)** 设  $F(u)$  是  $f(u)$  的原函数,  $u = \varphi(x)$  可导, 则  $F[\varphi(x)]$  是  $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$  的原函数, 即有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C. \quad (5-2-1)$$

**证明** 因为  $F(u)$  为  $f(u)$  的一个原函数, 得  $dF(u) = f(u)du$ . 由微分形式不变性, 当  $u = \varphi(x)$  为中间变量时, 仍有  $dF(u) = f(u)du$ . 因而有

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

所以

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C.$$

**说明** 由此定理可见, 虽然不定积分  $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$  是一个整体的记号, 但从形式上看, 被积表达式中的  $dx$  也可以当做自变量  $x$  的微分来对待. 从而微分等式  $\varphi'(x)dx = du$  可以方便地应用到被积表达式中.

 **例 1** 求  $\int 2\cos 2x dx$ .

**解** 被积函数中,  $\cos 2x$  是一个由  $\cos 2x = \cos u$ ,  $u = 2x$  复合而成的复合函数, 常数因子 2 恰好是中间变量  $u$  的导数, 因此作变换  $u = 2x$ , 便有

$$\int 2\cos 2x dx = \int \cos 2x \cdot 2dx = \int \cos 2x \cdot (2x)' dx = \int \cos u du = \sin u + C,$$

再把  $u = 2x$  代入, 即得

$$\int 2\cos 2x dx = \sin 2x + C.$$

根据例 1, 第一类换元公式法求不定积分可分以下步骤:

- (1) 将被积函数中的简单因子凑成复合函数中间变量的微分;
- (2) 引入中间变量作换元;
- (3) 利用基本积分公式计算不定积分;
- (4) 变量还原.

显然最重要的是第一步——凑微分, 所以第一类换元积分法通常也称为凑微分法.

 **例 2** 求  $\int 2xe^{x^2} dx$ .

**解** 被积函数中的因子  $e^{x^2}$  是一个由  $e^{x^2} = e^u$ ,  $u = x^2$  复合而成的复合函数, 剩下的因子  $2x$  恰好是中间变量  $u = x^2$  的导数, 于是有

$$\int 2xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} d(x^2) = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C.$$

 **例 3** 求  $\int \frac{1}{4+x^2} dx$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{1}{4+x^2} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} d\frac{x}{2} \quad \left(\text{令 } u = \frac{x}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u^2} du \\
 &= \frac{1}{2} \arctan u + C \\
 &= \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C.
 \end{aligned}$$

对第一类换元法熟悉后, 就不一定写出中间变量  $u$ . 例 3 可以这样书写

$$\int \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} d\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C.$$

 **例 4** 求  $\int \frac{1}{\sqrt{4^2-x^2}} dx$ .

$$\text{解} \quad \int \frac{1}{\sqrt{4^2-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} d\frac{x}{2} = \arcsin \frac{x}{2} + C.$$

 **例 5** 求  $\int \frac{\ln x}{x} dx$ .

$$\text{解} \quad \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.$$

 **例 6** 求  $\int \frac{1}{9-x^2} dx$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{1}{9-x^2} dx &= \frac{1}{6} \left( \int \frac{1}{3-x} dx + \int \frac{1}{3+x} dx \right) \\
 &= \frac{1}{6} (-\ln |3-x| + \ln |3+x|) + C \\
 &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3+x}{3-x} \right| + C.
 \end{aligned}$$

 **例 7** 求  $\int \sin^3 x dx$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \cdot \sin x dx \\
 &= -\int (1 - \cos^2 x) d(\cos x) \\
 &= -\left( \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x \right) + C
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

在积分的运算中, 被积函数有时还需要通过适当的代数式或三角函数式的恒等变形后, 再用凑微分法求不定积分.

 **例 8** 求  $\int \cos^2 x dx$ .

解 
$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

 **例 9** 求  $\int \tan x dx$ .

解 
$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{-d\cos x}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C.$$

同理, 我们可以推得  $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$ .

 **例 10** 求  $\int \sec x dx$ .

解 
$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{1 - \sin^2 x} d\sin x \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C. \end{aligned}$$

同理, 我们可以推得  $\int \csc x dx = -\ln |\csc x - \cot x| + C$ .

**说明** 对形如  $\int \sin^m x \cos^n x dx$  的积分, 如果  $m, n$  中有奇数, 取奇次幂的底数(如  $n$  是奇数, 则取  $\cos x$ )与  $dx$  凑微分, 那么被积函数一定能够变形为关于另一个底数的多项式函数, 从而可以顺利地计算出不定积分; 如果  $m, n$  均为偶数, 则利用倍角(半角)公式降幂, 直至将三角函数降为一次幂, 再逐项积分.

 **例 11** 某太阳能发电厂太阳能的能量  $y$  相对于接触的表面积  $x$  的变化率为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0.005}{\sqrt{0.01x + 1}},$$

且当  $x=0$  时,  $y=0$ . 试求太阳能的能量  $y$  的函数表达式.

解 对  $\frac{dy}{dx} = \frac{0.005}{\sqrt{0.01x + 1}}$  积分得

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{0.005}{\sqrt{0.01x + 1}} dx = \frac{0.005}{0.01} \int \frac{d(0.01x + 1)}{\sqrt{0.01x + 1}} \\ &= 0.5 \times 2\sqrt{0.01x + 1} + C \end{aligned}$$

又当  $x=0$  时,  $y=0$  代入上式得  $C=-1$ , 所以

$$y = \sqrt{0.01x + 1} - 1.$$



## 习题 5-2

1. 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{1}{9+x^2} dx;$$

$$(2) \int e^{2x} dx;$$

$$(3) \int (3x-2)^5 dx;$$

$$(4) \int \frac{1}{16-x^2} dx$$

$$(5) \int \sin(3x-5) dx;$$

$$(6) \int \frac{\sin x}{1+2\cos x} dx;$$

$$(7) \int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} dx;$$

$$(8) \int \cos^3 x dx;$$

$$(9) \int \sin x \cos x dx;$$

$$(10) \int \cot x dx;$$

$$(11) \int \csc x dx;$$

$$(12) \int \sin^2 x dx.$$

2. 求  $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx (a \neq 0).$

3. 求  $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx (a \neq 0).$

### 第三节 不定积分的第二类换元积分法



第二类换元积分法

第一类换元积分法是通过变量代换  $\varphi(x)=u$ , 把积分  $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$  化为容易积分的  $\int f(u)du$ . 但有时也会遇到相反的情形, 如果积分  $\int f(x)dx$  用直接积分法或第一类换元积分法不易求得, 但作适当的变量代换  $x=\psi(t)$  后, 将积分  $\int f(x)dx$  化为关于新的变量  $t$  的积分  $\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$  后能够容易求得, 则可以解决  $\int f(x)dx$  的计算问题. 具体如下:

$$\begin{aligned} & \int f(x)dx \quad (\text{令 } x=\psi(t)) \\ &= \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt \\ &= F(t)+C \quad (\text{代回反函数 } t=\psi^{-1}(x)) \\ &= F(\psi^{-1}(x))+C. \end{aligned}$$

这种求解过程就是第二类换元积分法的解题过程. 如对于  $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$ , 令  $x=a \sin t$ ,  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ , 则原式  $= \frac{a^2}{2} \int (1+\cos 2t) dt$ , 而此积分容易求解, 最后用  $t=\arcsin \frac{x}{a}$  回代即可.

下面给出定理 2.

**定理 2(第二类换元积分法)** 设函数  $x=\psi(t)$  是单调的可导函数, 并且  $\psi'(t) \neq 0$ , 又设  $\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$  具有原函数  $F(t)$ , 则有

$$\int f(x)dx = \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt = F(t) + C = F[\psi^{-1}(x)] + C.$$

**证明** 因为  $F(t)$  是  $\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$  的原函数, 记  $G(x)=F[\psi^{-1}(x)]$ , 利用复合函数及反函数的求导法则, 得到

$$G'(x) = \frac{dF}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = f'(\psi(t))[\psi^{-1}(x)]' = f[\psi(t)]\psi'(t) \cdot \frac{1}{\psi'(t)} = f(x),$$

即  $G(x)$  是  $f(x)$  的原函数, 所以有

$$\int f(x)dx = G(x) + C = F[\psi^{-1}(x)] + C.$$

**例 1** 求不定积分  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ .

**解** 为了去根号, 令  $\sqrt{x}=t(t \geq 0)$ , 则  $x=t^2$ ,  $dx=2t dt$ . 于是, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx &= \int \frac{2t^2}{1+t^2}dt = 2 \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt = 2 \int (1 - \frac{1}{1+t^2})dt \\ &= 2(t - \arctan t) + C = 2\sqrt{x} - 2\arctan \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

**例 2** 求  $\int \sqrt{a^2-x^2}dx (a > 0)$ .

**解** 可以利用三角函数公式

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

来化去根式.

令  $x = a \sin t$ ,  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ , 则

$$\sqrt{a^2-x^2} = a \cos t, \quad dx = a \cos t dt, \quad t = \arcsin \frac{x}{a}$$

所以

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2-x^2}dx &= \int a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t)dt \\ &= \frac{a^2}{2} (t + \frac{1}{2} \sin 2t) + C = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C \end{aligned}$$

由图 5-3-1 得  $\sin t = \frac{x}{a}$ ,  $\cos t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$ , 代入上式后得到

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

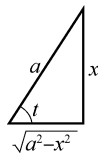


图 5-3-1

**说明** 辅助直角三角形非常重要, 便于把三角函数化简.

**例 3** 求  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx (a > 0)$ .

解 可以利用三角函数公式

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

来化去根式.

令  $x = a \tan t$ ,  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx &= \int \frac{1}{a \sec t} \cdot a \sec^2 t dt = \int \sec t dt = \int \frac{1}{\cos t} dt \\ &= \int \frac{1}{1 - \sin^2 t} d(\sin t) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right| + C, \end{aligned}$$

由图 5-3-2 得

$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

代入上式, 化简得

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C.$$

**说明** 注意作代换后变量  $t$  的范围, 以保证反函数单调可导.

**例 4** 求  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx (a > 0)$ .

解 可以利用三角函数公式

$$\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$$

来化去根式.

令  $x = a \sec t$ ,  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ , 则

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-a^2} &= a \tan t, \quad dx = a \sec t \tan t dt, \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx &= \int \frac{a \sec t \tan t}{a \tan t} dt = \int \sec t dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right| + C, \end{aligned}$$

由图 5-3-3 得

$$\sin t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x},$$

代入上式得

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + C.$$

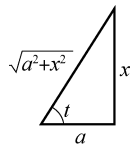


图 5-3-2

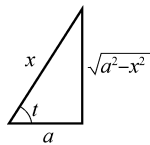


图 5-3-3

**说明** 二次根式的积分, 除去可以直接运用基本积分公式的, 都可以选用上述三种三角代换计算.

### 习题 5-3

1. 求不定积分  $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ .

2. 求不定积分  $\int \sqrt{9-x^2} dx$ .

3. 求不定积分  $\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx$ .

4. 求不定积分  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} dx$ .



分部积分法

## 第四节 不定积分的分部积分法

直接积分法适用于基本初等函数经过有限次的和、差运算得到的函数的不定积分, 换元积分法适用于复合函数的不定积分. 对于不定积分  $\int x e^x dx$ ,  $\int x \cos x dx$ ,  $\int x \ln x dx$ , 该如何求解呢? 这类不定积分的被积函数是两个基本初等函数乘积的形式, 下面将在乘积的微分法则基础上介绍不定积分的分部积分法.

设函数  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  具有连续的导数, 由

$$d(uv) = u dv + v du,$$

可得

$$u dv = d(uv) - v du,$$

两边积分得

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (5-4-1)$$

或

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx \quad (5-4-2)$$

公式(5-4-1)与公式(5-4-2)称为**分部积分公式**. 分别积分法实质上就是求两个函数乘积的导数(或微分)的逆运算.

以上表明, 当不定积分  $\int u dv$  不易求出时, 可以考虑将其中的  $u$  与  $v$  互相交换, 如果所得的不定积分  $\int v du$  容易求出, 则利用公式(5-4-1), 即可求出原来的不定积分  $\int u dv$ . 分部积分法起到了化难为易的作用.

**例 1** 求  $\int x \cos x dx$ .

**解** 根据分部积分公式, 首先要选择  $u$  和  $dv$ , 显然有两种方式, 我们不妨先设  $u = x$ ,  $dv = \cos x dx$  即  $v = \sin x$ , 则

$$\int x \cos x dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

采用这种选择方式, 积分很顺利地积出, 但是如果作如下的选择:

设  $u = \cos x$ ,  $x dx = dv$ , 即  $v = \frac{1}{2}x^2$ , 则

$$\int x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \cos x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \cos x - \frac{1}{2} \int x^2 \sin x dx,$$

比较原积分  $\int x \cos x dx$  与新得到的积分  $\frac{1}{2} \int x^2 \sin x dx$ , 显然后面的积分变得更加复杂难以解出.

由此可见利用分部积分公式的关键是恰当地选择  $u$  和  $dv$ . 如果选择不当, 就会使原来的积分变得更加复杂.

在选取  $u$  和  $dv$  时一般考虑下面两点:

(1)  $v$  要容易求得;

(2)  $\int v du$  要比  $\int u dv$  容易求出.

 **例 2** 求  $\int x e^x dx$ .

**解** 令  $u = x$ ,  $e^x dx = dv$ ,  $v = e^x$ , 则

$$\int x e^x dx = \int x de^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

在本例中, 如果选取  $u = e^x$ ,  $dv = x dx$ , 则  $du = e^x dx$ ,  $v = \frac{1}{2}x^2$ , 从而积分  $\int v du = \int \frac{1}{2}x^2 e^x dx$  反而比原积分更复杂.

通常我们可以遵循对数函数、反三角函数、幂函数、三角函数、指数函数的顺序, 即把被积函数的两个因子中, 排在前面的一类函数确定为  $u$ , 这种确定  $u$  的顺序可以简单地记为“对、反、幂、三、指”.

 **例 3** 求  $\int x^2 e^x dx$ .

**解** 令  $u = x^2$ ,  $e^x dx = dv$ ,  $v = e^x$ , 则利用分部积分公式得

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x dx^2 = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx,$$

这里运用了一次分部积分公式后, 虽然没有直接将积分积出, 但是  $x$  的幂次比原来降了一次,  $\int x e^x dx$  显然比  $\int x^2 e^x dx$  容易积出, 根据例 2, 我们可以继续运用分部积分公式, 从而得到

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x de^x \\ &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C \\ &= e^x (x^2 - 2x + 2) + C. \end{aligned}$$

 **例 4** 求  $\int x \ln x dx$ .

**解** 令  $u = \ln x$ ,  $x dx = \frac{1}{2} dx^2$ ,  $v = \frac{1}{2}x^2$ , 则

$$\begin{aligned}\int x \ln x dx &= \int \frac{1}{2} \ln x dx^2 = \frac{1}{2} \left( x^2 \ln x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \frac{1}{2} \left( x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 \right) + C \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{4} x^2 + C.\end{aligned}$$

对分部积分公式运用比较熟练后,就不必具体写出  $u$  和  $dv$ ,只要把被积表达式写成  $\int u dv$  的形式,直接套用分部积分公式即可.

 **例 5** 求  $\int x \arctan x dx$ .

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int x \arctan x dx &= \frac{1}{2} \int \arctan x dx^2 = \frac{1}{2} \left( x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} (x^2 \arctan x - x + \arctan x) + C.\end{aligned}$$

 **例 6** 求  $\int e^x \sin x dx$ .

$$\begin{aligned}\text{解} \quad (\text{法一}) \quad \int e^x \sin x dx &= \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ &= e^x \sin x - \int \cos x de^x \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx, \\ \therefore \int e^x \sin x dx &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C. \\ (\text{法二}) \quad \int e^x \sin x dx &= \int e^x d(-\cos x) = e^x (-\cos x) + \int \cos x d(e^x) \\ &= -e^x \cos x + \int \cos x e^x dx = -e^x \cos x + \int e^x d \sin x \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x de^x \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx, \\ \therefore \int e^x \sin x dx &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.\end{aligned}$$

**说明** 当被积函数是指数函数与正(余)弦函数的乘积时,任选一种函数凑微分,经过两次分部积分后,会还原到原来的积分形式,只是系数发生了变化,我们往往称它为“循环法”,但要注意两次凑微分函数的选择要一致.

 **例 7** 求  $\int e^{\sqrt{x}} dx$ .

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \text{令 } t = \sqrt{x}, \quad x = t^2, \quad dx = 2t dt, \\ \int e^{\sqrt{x}} dx &= \int e^t 2t dt = \int 2t de^t = 2t e^t - 2 \int e^t dt = 2t e^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C.\end{aligned}$$

**说明** 有时需要把分部积分法和换元积分法综合在一起使用.

## 习题 5-4

## 1. 填空

(1) 计算  $\int x \cos x dx$ , 可设  $u = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $dv = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(2) 计算  $\int \arcsin x dx$ , 可设  $u = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $dv = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(3) 计算  $\int x^3 \ln x dx$ , 可设  $u = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $dv = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(4) 计算  $\int x e^x dx$ , 可设  $u = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $dv = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## 2. 计算下列不定积分:

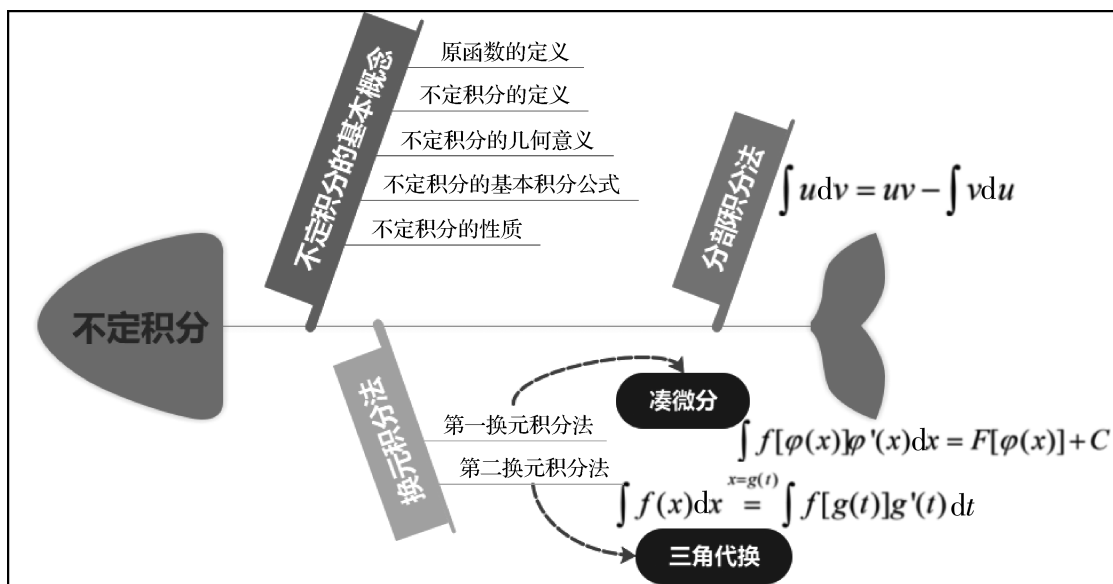
(1)  $\int \cos \sqrt{x} dx$ ;

(2)  $\int x e^{3x} dx$ ;

(3)  $\int x \sin x dx$ ;

(4)  $\int (x^3 - 3x) e^{-x} dx$ ;

## 鱼骨图小结



## 总习题五

## 一、单选题

1. 函数  $f(x)$  的( )原函数, 称为  $f(x)$  的不定积分.

A. 任意一个

B. 所有



C. 唯一

D. 某一个

2. 若函数  $f(x)$  有两个原函数分别为  $F(x)$ ,  $G(x)$ , 则  $f'(x) - G'(x) = ( \quad )$ .A.  $f(x)$ B.  $F(x)$ 

C. 0

D.  $f'(x)$ 3.  $\int \left( \frac{1}{1+x^2} \right)' dx = ( \quad )$ .A.  $\frac{1}{1+x^2}$ B.  $\frac{1}{1+x^2} + C$ C.  $\arctan x$ D.  $\arctan x + C$ 

4. 在下列等式中, 正确的是( ).

A.  $\int f'(x) dx = f(x)$ B.  $\int df(x) = f(x)$ C.  $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$ D.  $d \int f(x) dx = f(x)$ 5. 设  $f(x)$  的一个原函数是  $\frac{1}{x}$ , 则  $f'(x) = ( \quad )$ .A.  $\ln |x|$ B.  $\frac{1}{x}$ C.  $-\frac{1}{x^2}$ D.  $\frac{2}{x^3}$ 6. 若  $\int f(x) dx = 2 \cos \frac{x}{2} + C$ , 则  $f(x) = ( \quad )$ .A.  $-\sin \frac{x}{2} + C$ B.  $\sin \frac{x}{2}$ C.  $-2 \sin \frac{x}{2} + C$ D.  $-\sin \frac{x}{2}$ 7. (2019 年) 设  $f(x)$  是函数  $\cos 2x$  的一个原函数, 且  $f(0) = 0$ , 则  $\int f(x) dx = ( \quad )$ .A.  $-\frac{1}{4} \cos 2x + C$ B.  $-\frac{1}{2} \cos 2x + C$ C.  $-\cos 2x + C$ D.  $\cos 2x + C$ 8. 已知  $f'(x) = \frac{1}{x(1+2\ln x)}$ , 且  $f(1) = 1$ , 则  $f(x)$  等于( ).A.  $\ln(1+2\ln x) + 1$ B.  $\frac{1}{2} \ln(1+2\ln x) + 1$ C.  $\frac{1}{2} \ln(1+2\ln x) + \frac{1}{2}$ D.  $2\ln(1+2\ln x) + 1$ 9. (2020 年) 已知  $f(x)$  的一个原函数是  $\ln |3x-1|$ , 则  $\int f(3x) dx = ( \quad )$ .A.  $\frac{1}{3} \ln |9x-1| + C$ B.  $\frac{1}{3} \ln |3x-1| + C$ C.  $\ln |9x-1| + C$ D.  $3\ln |9x-1| + C$ 10.  $\int [f(x) + xf'(x)] dx = ( \quad )$ .



- A.  $f(x) + C$   
C.  $f'(x) + C$

- B.  $xf(x) + C$   
D.  $f^2(x) + C$

## 二、填空题

1. 设  $\ln x$  是函数  $f(x)$  的一个原函数, 则  $\int f(x) dx =$  \_\_\_\_\_.
2. 已知  $\int f(x) dx = \sin^2 x + C$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.
3. 若函数  $f(x)$  具有一阶连续导数, 则  $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx =$  \_\_\_\_\_.
4.  $\frac{d}{dx} \left( \int \frac{x}{e^x} dx \right) =$  \_\_\_\_\_.
5.  $\int f'(2x) dx =$  \_\_\_\_\_.
6.  $\int \cos^3 x dx =$  \_\_\_\_\_.
7.  $\int \sqrt{x} \sqrt{x} dx =$  \_\_\_\_\_.
8.  $\int (3^x + x^3) dx =$  \_\_\_\_\_.
9.  $\int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx =$  \_\_\_\_\_.
10. (2015 年) 设  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则  $\int f(3-2x) dx =$  \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

1. 已知曲线  $y = f(x)$  过点  $(0, 2)$ , 且其上任意点处的切线斜率为  $\frac{1}{2}x + 3e^x$ , 求该曲线方程.

2. 求下列不定积分.

(1)  $\int \left( \frac{1}{x} + 3^x \right) dx;$

(2)  $\int \frac{5x^4 + 5x^2 + 1}{x^2 + 1} dx;$

(3)  $\int \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx;$

(4)  $\int \frac{4x^4 + 1}{x^2 + 1} dx;$

(5)  $\int \frac{1}{x^2 - 4} dx;$

(6)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx;$

(7)  $\int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}} dx;$

(8) (2013 年)  $\int x^2 \cos 2x dx.$

3. 设  $\int xf(x) dx = \arcsin x + C$ , 求  $\int \frac{dx}{f(x)}.$

4. (2011 年) 设  $f(x)$  的一个原函数是  $x^2 \sin x$ , 求不定积分  $\int \frac{f(x)}{x} dx.$

## 畅游微积世界 品味数学神奇——定积分

### 课程思政元素

牛顿和莱布尼茨对微积分的推动作用是十分重要的。牛顿在17世纪末提出了微积分的基本概念和方法，他的工作主要集中在力学和天文学领域。他提出了微分和积分的概念，并用它们来解决运动学和引力等问题。同时，莱布尼茨也在同一时期独立地开发了微积分学，并提出了微积分的符号表示法。这两位科学家的工作为微积分学奠定了基础，并推动了数学和科学的发展。

牛顿和莱布尼茨的微积分理论和方法为后来的数学家和科学家提供了重要的工具，对现代科学和工程学的发展产生了深远的影响。他们的工作也为微积分学科的形成和发展奠定了基础，成为了现代数学的重要组成部分。因此，牛顿和莱布尼茨对微积分的推动作用是不可忽视的，他们的贡献在数学和科学领域具有深远的影响。

《荀子·大略》中有“夫尽小者大，积微者著”，意思是微小的事物，经过积累，变得显著。这是定积分思想的起源。在求解定积分的过程中，不均匀量是通过“分割(化整为零)”、“近似(以直代曲)”、“求和(积零为整)”、“取极限(精确量化)”而得到。启发我们处理问题时可以将一个大问题分解为若干小问题，逐个击破。

一个数学家的目的是要了解数学。历史上数学的进展不外两途：增加对于已知材料的了解和推广范围。

—— 陈省身

17世纪最伟大的成就是微积分，微积分是继欧几里得几何之后，全部数学中的一个最大创造。

—— 克莱因

在数学的领域中，提出问题的艺术比解答问题的艺术更重要。

—— 康托尔

定积分是积分学中又一个重要的基本概念，在自然科学和实际问题中有着广泛的应用。本章先从几何和物理问题出发引进定积分的定义，然后讨论定积分的性质、计算方法及其应用。

## 第一节 定积分的概念



定积分的概念

## 一、两个实际问题

## 1. 曲边梯形的面积

**曲边梯形：**如图 6-1-1，设函数  $y=f(x)$  在区间  $[a, b]$  上非负、连续. 由直线  $x=a$ ,  $x=b$ ,  $y=0$  及曲线  $y=f(x)$  所围成的图形称为曲边梯形，其中曲线弧  $y=f(x)$  称为曲边.

求曲边梯形的面积的近似值. 一种简单的方法是用以区间  $[a, b]$  为底,  $f(a)$  (或  $f(b)$ ) 为高的矩形的面积作为  $A$  的近似值. 由于“变高” $f(x)$  在  $[a, b]$  上有较大的变化, 这个近似值与  $A$  的误差可能会很大.

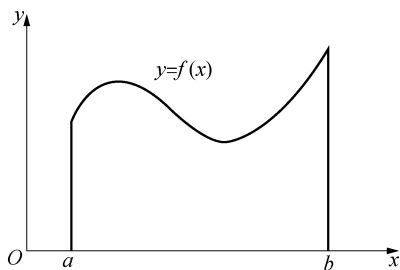


图 6-1-1

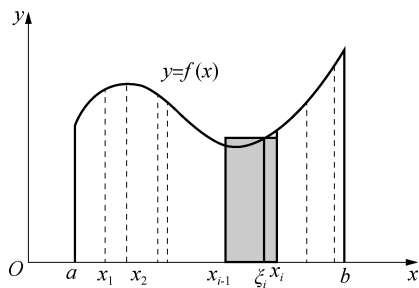


图 6-1-2

但是，如果我们将曲边梯形的底边变得很短，如图 6-1-2，例如对应于  $[a, b]$  的某个很小的子区间  $[x_{i-1}, x_i]$  的窄条形曲边梯形，因为  $f(x)$  是连续函数，所以“变高” $f(x)$  在小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上的变化不会很大，因此，用小矩形的面积近似代替小曲边梯形的面积，产生的误差就比较小. 把这一个个小矩形的面积相加，就比较接近  $A$  的值.

显然每个小曲边梯形的底边愈短，所得出的结果就愈精确. 当所有小曲边梯形的底边长都无限缩小时 (此时小曲边梯形的个数无限增多)，它们的面积之和就无限接近于曲边梯形的面积  $A$ . 因此我们很自然地把  $A$  看作是小矩形面积之和的极限.

上述分析过程可以用较准确的数学语言表达为三个步骤：

## (1) 分割

将曲边梯形分割成一些小的曲边梯形，每个小曲边梯形的面积都近似地等于小矩形的面积，则所有小矩形面积的和就是曲边梯形面积的近似值.

具体方法是：在区间  $[a, b]$  中任意插入  $n+1$  个分点 (图 6-1-2)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把  $[a, b]$  分成  $n$  个小区间  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$ ，第  $i$  个区

间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

### (2) 近似求和

经过每一个分点作平行于  $y$  轴的直线段, 把曲边梯形分成  $n$  个小曲边梯形. 第  $i$  个小曲边梯形的面积记为  $\Delta S_i$ , 于是

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta S_i$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点  $\xi_i$ , 以 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底、 $f(\xi_i)$ 为高的窄矩形近似替代第  $i$  个窄曲边梯形,  $i=1, 2, 3, \dots, n$ , 把这样得到的  $n$  个窄矩形面积之和作为所求曲边梯形面积  $A$  的近似值, 即

$$A \approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

### (3) 取极限

显然, 分点越多, 每个小曲边梯形越窄, 所求得的曲边梯形面积  $A$  的近似值就越接近曲边梯形面积  $A$  的精确值, 因此, 要求曲边梯形面积  $A$  的精确值, 只需无限地增加分点, 使每个小曲边梯形的宽度趋于零. 记  $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ , 于是, 上述增加分点, 使每个小曲边梯形的宽度趋于零, 相当于令  $\lambda \rightarrow 0$ . 所以曲边梯形的面积为

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

## 2. 变速直线运动的路程

设物体作变速直线运动, 已知速度  $v=v(t)$  是时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上  $t$  的连续函数, 且  $v(t) \geq 0$ , 计算在这段时间内物体所经过的路程  $S$ , 如图 6-1-3.

对于匀速直线运动, 有路程公式:

路程 = 速度  $\times$  时间

现在面临的问题是, 速度不是常量而是随时间在变化, 因此不能简单套用上面的路程公式, 由于速度  $v(t)$  是随着时间  $t$  连续变化的, 在一小段时间内它的变化很小, 所以可以用“以匀速代替变速”的辩证思想, 把它看成每个小段时间内的匀速运动, 而且时间间隔越短, 这种近似替代的精确度就越高.

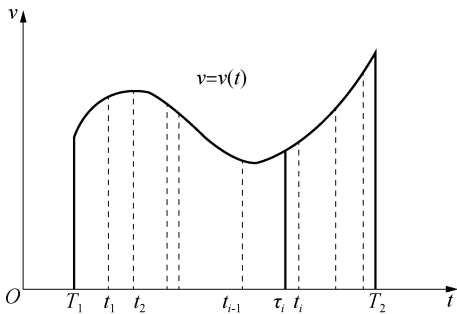


图 6-1-3

### (1) 分割

把时间区间 $[T_1, T_2]$ 分成  $n$  个小的时间间隔  $\Delta t_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , 在每个小的时间间隔  $\Delta t_i$  内, 物体运动看成是匀速的, 其速度近似为物体在时间间隔  $\Delta t_i$  内某点  $\tau_i$  的速度  $v(\tau_i)$ , 物体在时间间隔  $\Delta t_i$  内运动的路程近似为  $\Delta s_i = v(\tau_i)\Delta t_i$ . 把物体在每一小的时间间隔  $\Delta t_i$  内运动的路程加起来作为物体在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内所经过的路程  $S$  的近似值. 具体做法是:

在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内任意插入  $n+1$  个分点(图 6-1-3)

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2,$$

$[T_1, T_2]$  分成  $n$  个小区段

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{n-1}, t_n],$$

第  $i$  个子区间  $[t_{i-1}, t_i]$  的长记为  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

(2) 近似求和

在每个子区间  $[t_{i-1}, t_i]$  上任取一个时刻  $\tau_i$ , 以在时刻  $\tau_i$  的速度  $v(\tau_i)$  作为质点在  $[t_{i-1}, t_i]$  上各个时刻的速度, 即把质点在时间段  $[t_{i-1}, t_i]$  内看成以速度  $v(\tau_i)$  做匀速运动, 得到质点在该时间段内所走路程  $\Delta s_i$  的近似值, 即

$$\Delta s_i \approx v(\tau_i) \Delta t_i (i = 1, 2, \cdots, n).$$

于是这  $n$  段部分路程的近似值之和就是所求变速直线运动路程  $s$  的近似值, 即

$$s = \sum_{i=1}^n \Delta s_i \approx \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i$$

(3) 取极限

记  $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$ , 当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 取上述和式的极限, 即得变速直线运动的路程

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i.$$

上面两个例子, 一个是几何问题, 一个是物理问题, 它们有着完全不同的实际背景, 但在解决问题的过程中, 都经历了先化整为零, 再由部分求全体的转换, 贯彻了在小范围内以直代曲、以均匀代替不均匀、以近似代替精确的辩证思想, 最后通过取极限的方法使问题获得解决.

抛开上述问题的具体意义, 抓住它们在数量关系上共同的本质与特性加以概括, 就抽象出下述定积分的定义.

## 二、定积分的概念

**定义** 设函数  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上有定义, 在  $[a, b]$  中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把区间  $[a, b]$  分成  $n$  个子区间  $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \cdots, n)$ , 如图 6-1-4 所示, 其长度记为  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , 在每个子区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上任取一个点  $\xi_i$ , 作和

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

称为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个积分和, 记  $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$ , 如果不论对  $[a, b]$  怎样分法, 也不论在小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上点  $\xi_i$  怎样取法, 只要当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 和  $S$  总趋于确定的极限  $I$ , 这时我们称这个极限  $I$  为函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的定积分,

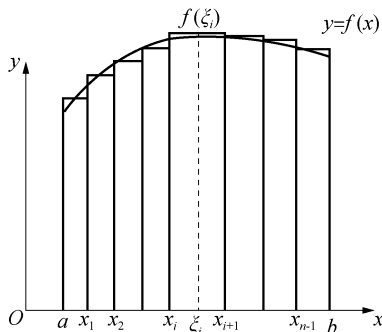


图 6-1-4



记作  $\int_a^b f(x) dx$ , 即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

其中  $f(x)$  称为被积函数,  $f(x) dx$  称为被积表达式,  $x$  叫作积分变量,  $a$  叫作积分下限,  $b$  叫作积分上限,  $[a, b]$  叫作积分区间.

根据定积分的定义, 前面两个实际问题可以分别表述如下:

曲线  $y=f(x)$  ( $f(x) \geq 0$ )、 $x$  轴及两条直线  $x=a$ ,  $x=b$  所围成的曲边梯形的面积  $A$  等于函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的定积分, 即

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

物体以变速  $v=v(t)$  ( $v(t) \geq 0$ ) 做直线运动, 从时刻  $t=T_1$  到时刻  $t=T_2$ , 这物体经过的路程  $S$  等于函数  $v(t)$  在区间  $[T_1, T_2]$  上的定积分, 即

$$S = \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt.$$

**说明** (1) 定积分的值只与被积函数及积分区间有关, 而与积分变量的记法无关, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

(2) 如果函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的定积分存在, 我们就说  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可积.

那么函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上满足什么条件时,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积呢? 这个问题我们不做深入讨论, 只给出如下两个充分条件:

**定理 1** 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.

**定理 2** 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有界, 且只有有限个间断点, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.

### 三、定积分的几何意义

设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数, 由曲线  $y=f(x)$  及直线  $x=a$ ,  $x=b$ ,  $y=0$  所围成的曲边梯形的面积记为  $A$ . 由定积分的定义易知道定积分有如下几何意义:

(1) 当  $f(x) \geq 0$  时,  $\int_a^b f(x) dx = A$

当  $f(x) \leq 0$  时,  $-f(x) \geq 0$ , 于是曲边梯形的面积

$$A = \int_a^b [-f(x)] dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [-f(\xi_i)] \Delta x_i = -\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i)] \Delta x_i = -\int_a^b f(x) dx,$$

这时,  $\int_a^b f(x) dx = -A$ .

(2) 如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有时取正值, 有时取负值时, 函数的图形有的在  $x$  轴的上方, 有的在  $x$  轴下方. 这时定积分在几何上表示为: 上述这些部分曲边梯形面积的代数

和, 如图 6-1-5 所示, 有

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3$$

其中  $A_1, A_2, A_3$  分别是图 6-1-5 中三部分曲边梯形的面积, 它们都是正数.

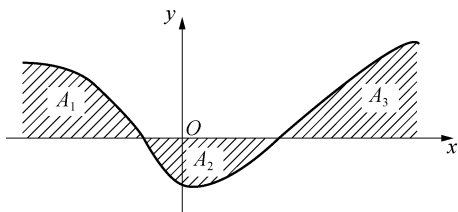


图 6-1-5

**说明** 在定义定积分  $\int_a^b f(x) dx$  时, 我们曾要求积分上限大于积分下限, 即  $a < b$ , 今后为了应用方便, 我们规定: 当  $a > b$  时

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

特殊地, (1) 当  $a = b$  时, 有  $\int_a^a f(x) dx = 0$

(2) 当  $f(x) \equiv 1$  时, 有  $\int_a^b f(x) dx = b - a$

### 习题 6-1

1. 用定积分表示由曲线  $y = x^2 + 1$  与直线  $x = 1, x = 2$  及  $x$  轴所围成的曲边梯形的面积.

2. 用定积分表示由曲线  $y = \sin x$  与直线  $x = 0, x = \pi$  及  $x$  轴所围成的曲边梯形的面积.

3. 根据定积分的定义, 判断下列定积分的值是正还是负.

(1)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx;$

(2)  $\int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx.$

(3)  $\int_{-1}^3 x dx;$

(4)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx.$

4. 根据定积分的几何意义, 说明下列等式的正确性.

(1)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx;$

(2)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt = 0.$



定积分的基本性质

## 第二节 定积分的基本性质

积分概念的讨论显示了它在科学技术中的重要作用. 但是如果不能找出计算定积分的简单有效的办法, 而只能按照定义去计算繁杂的和式极限, 将会大大影响定积分的活力, 下一节我们将解决定积分的计算问题, 本节先根据定积分的定义和极限的运算性质直接得出定积分的一些基本性质. 这些性质在有关定积分的计算和证明中经常用到.

定积分的性质大体上分为两类, 一类是用等式表示的性质, 另一类是用不等式表示的性质. 在下面的论述中, 我们假定  $f(x)$  和  $g(x)$  都是区间  $[a, b]$  上的连续函数, 根据定义, 可以直接得到性质 1 和性质 2.

### 性质 1 (定积分的线性性质)

(1) 被积函数的常数因子可以提到积分号外面, 即

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

**证明** 
$$\int_a^b k f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k f(\xi_i) \Delta x_i = k \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = k \int_a^b f(x) dx.$$

(2) 两个函数的和(差)的定积分等于它们的定积分的和(差), 即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

**证明** 
$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

### 性质 2 (积分区间的可加性)

如果将积分区间分成两部分, 则在整个区间上的定积分等于这两部分区间上定积分之和(图 6-2-1), 即设  $a < c < b$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

这个性质表明定积分对于积分区间具有可加性.

值得注意的是不论  $a, b, c$  的相对位置如何, 总有等式

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

成立.

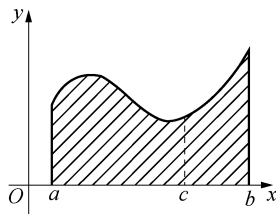


图 6-2-1



**说明** 例如当  $a < b < c$  时, 由于

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx,$$

于是有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

### 性质 3 (用不等式表示的性质)

如果在区间  $[a, b]$  上  $f(x) \geq 0$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (a < b).$$

**推论 1** 如果在区间  $[a, b]$  上  $f(x) \leq g(x)$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (a < b).$$

**证明** 由已知得  $g(x) - f(x) \geq 0$ , 从而

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0,$$

所以

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

**推论 2**  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b).$

**证明** 因为  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ , 所以

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

即

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

### 性质 4 (估值定理)

设  $M$  及  $m$  分别是函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的最大值及最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (a < b).$$

**证明** 因为  $m \leq f(x) \leq M$ , 由性质 3 的推论得

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx,$$

从而

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

**性质 5 (定积分中值定理)** 如果函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则在  $[a, b]$  上至少存在一个点  $\xi$ , 使得下式成立:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

这个公式叫作定积分中值公式.

**证明** 由性质 4, 有

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x) dx \leqslant M(b-a),$$

不等式的各边除以  $b-a$ , 得

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leqslant M,$$

再由连续函数的介值定理, 在  $[a, b]$  上至少存在一点  $\xi$ , 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

即

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

**说明** 定积分中值定理的几何意义是: 由曲线  $y=f(x)$ , 直线  $x=a$ ,  $x=b$  和  $x$  轴所围成的曲边梯形的面积等于区间  $[a, b]$  上某个矩形的面积, 这个矩形的底是区间  $[a, b]$ , 矩形的高为区间  $[a, b]$  内某一点  $\xi$  处的函数值  $f(\xi)$ , 如图 6-2-2 所示.

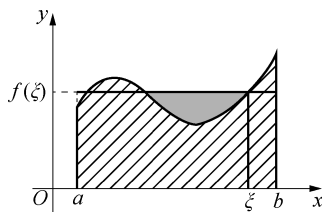


图 6-2-2

**例 1** 不用计算, 比较积分值  $\int_0^1 x^2 dx$  和  $\int_0^1 x^3 dx$  的大小.

**解**  $\because x^2 > x^3, x \in (0, 1),$

$$\therefore \int_0^1 x^2 dx > \int_0^1 x^3 dx.$$

**例 2** 估计定积分  $\int_0^\pi \frac{1}{3+\sin x} dx$  的值.

**解** 设  $f(x) = \frac{1}{3+\sin x},$

$\because x \in [0, \pi]$  时,  $0 \leqslant \sin x \leqslant 1,$

$$\therefore \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{3+\sin x} \leqslant \frac{1}{3},$$

由性质 4 得

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \int_0^\pi \frac{1}{3+\sin x} dx \leqslant \frac{\pi}{3}.$$

**例 3** 求由曲线  $f(x)=x^2$ ,  $x$  轴及直线  $x=0$ 、 $x=1$  所围成的平面图形的面积.

**解** 由定积分的几何意义可知, 该平面图形的面积即为定积分  $\int_0^1 x^2 dx$ .

(1) 因为被积函数  $f(x)=x^2$  在  $[0, 1]$  上连续, 所以  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上一定可积.

(2) 为便于计算,不妨把区间 $[0, 1]$ 分成 $n$ 等份,分点为 $x_i = \frac{i}{n} (i=0, 1, \dots, n)$ ,

这样每个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度 $\Delta x_i = \frac{1}{n} (i=1, 2, \dots, n)$ .

(3) 取 $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$ , 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.\end{aligned}$$

$$(4) \int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

## 习题 6-2

1. 不用计算,判断下列定积分的大小.

$$(1) \int_1^2 x^2 dx \text{ 与 } \int_1^2 x^3 dx;$$

$$(2) \int_1^2 \ln x dx \text{ 与 } \int_1^2 (\ln x)^2 dx.$$

2. 运用估值定理估计下列定积分的值.

$$(1) \int_1^3 (2x^2 - 1) dx;$$

$$(2) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 + \sin^2 x) dx.$$

## 第三节 微积分学基本定理



微分学基本定理

原函数和定积分具有完全不同的背景,是作为互不相干的两个概念提出来的,然而它们有着深刻的内在联系,根据这个联系,定积分的计算将通过求原函数而获得圆满的解决.

### 一、变动积分上限的函数及其导数

**定义** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续,并且设 $x$ 为 $[a, b]$ 内的一点,则 $f(x)$ 在 $[a, x]$ 上也连续,所以定积分 $\int_a^x f(t) dt$ (定积分的值与积分变量无关,所以把 $\int_a^x f(x) dx$ 改写为 $\int_a^x f(t) dt$ )存在.这是一个上限为变数的定积分.现在让 $x$ 在 $[a, b]$ 内任意变动,则对于 $x$ 的每一个值,就有一个唯一确定的积分值与之对应,这样我们就在区间 $[a, b]$ 上定义了一个函数,它以变动的积分上限 $x$ 为自变量,我们记这个函数为 $\Phi(x)$ ,称为变动上限积分函数.即

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

这个函数的几何意义如图 6-3-1 所示, 它表示右侧直边可以变动的曲边梯形(图中阴影部分)的面积.

变动上限积分函数  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  有一极为重要的性质: 它是  $f(x)$  的一个原函数. 具体可表述为下面的定理.

**定理 1** 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则变动上限积分函数  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  在  $[a, b]$  上具有导数, 并且它的导数为

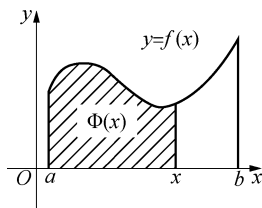


图 6-3-1

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

**证明** 根据的导数定义, 只要证明

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(x).$$

给  $x$  以增量  $\Delta x$ , 则函数  $\Phi(x)$  有相应的增量  $\Delta\Phi$ ,

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \end{aligned}$$

由积分中值定理, 存在一点  $\xi$  介于  $x$  与  $x + \Delta x$  之间, 使得

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi) \Delta x,$$

当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\xi \rightarrow x$ . 由  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 得到

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x),$$

即

$$\Phi'(x) = f(x).$$

若  $x=a$ , 取  $\Delta x > 0$ , 则同理可证  $\Phi'_+(a) = f(a)$ ; 若  $x=b$ , 取  $\Delta x < 0$ , 则同理可证  $\Phi'_-(b) = f(b)$ .

上述定理指出了一个重要结论: 连续函数  $f(x)$  取变上限  $x$  的定积分然后求导, 其结果还原为  $f(x)$  本身.

**例 1** 求  $\frac{d}{dx} \int_a^x e^t \sin t dt$ .

**解** 相当于  $f(t) = e^t \sin t$ , 所以

$$\frac{d}{dx} \int_a^x e^t \sin t dt = f(x) = e^x \sin x.$$

 **例 2** 设  $y = \int_x^1 \sqrt{1+t^3} dt$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

**解** 这里积分下限是变量, 先转化为积分上限是变量, 然后再用定理 1 求解.

原式  $= -\int_1^x \sqrt{1+t^3} dt$ , 所以  $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{1+x^3}$ .

 **例 3** 设  $f(x) = \int_a^{x^2} e^{-t^2} dt$ , 求  $\frac{df}{dx}$ .

**解** 变动上限不是  $x$ , 而是  $x$  的函数  $x^2$ , 它可以看成由  $u = x^2$  和  $f(u) = \int_a^u e^{-t^2} dt$  构成的复合函数.

根据复合函数的求导法则,

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} \left( \int_a^u e^{-t^2} dt \right) \cdot \frac{d}{dx} (x^2) = e^{-u^2} \cdot 2x = 2x e^{-x^4}.$$

## 二、牛顿-莱布尼茨公式

**定理 2** 如果函数  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (6-3-1)$$

**证明** 已知函数  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  的一个原函数, 又根据定理 1, 积分上限函数  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  也是  $f(x)$  的一个原函数, 这两个原函数之间只相差一个常数, 即

$$F(x) = \Phi(x) + C \quad (a \leq x \leq b).$$

令  $x = a$  得,

$$F(a) = \Phi(a) + C = \int_a^a f(t) dt + C = C,$$

令  $x = b$  得,

$$F(b) = \Phi(b) + C,$$

所以

$$\Phi(b) = F(b) - F(a),$$

即

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**说明** 式(6-3-1)称为**牛顿-莱布尼茨公式**. 它把定积分的计算转化为求原函数在积分上下限的函数值之差.

(2) 定理 1 和定理 2 称为**微积分学基本定理**. 它们揭示了定积分与不定积分这两个来自完全不同领域的概念之间简单而又本质的联系.

(3) 它从根本上解决了定积分的计算, 是高等数学中最重要、最著名的定理之一, 也是科学史上的一个伟大里程碑.

**例 4**

计算正弦曲线  $y = \sin x$  从  $x=0$  到  $x=\pi$  一段与  $x$  轴所围图形的面积(图 6-3-2).

**解** 由定积分的几何意义知

$$A = \int_0^{\pi} \sin x \, dx,$$

因为  $-\cos x$  是  $\sin x$  的一个原函数, 所以

$$A = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = 2.$$

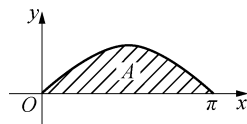


图 6-3-2

**例 5**

求  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ .

**解** 因为  $\arctan x$  是  $\frac{1}{1+x^2}$  的一个原函数, 所以

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_1^{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} - \arctan 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

**例 6**

计算定积分  $\int_1^4 \frac{dx}{2x+1}$ .

**解** 因为

$$\int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2x+1} d(2x+1) = \frac{1}{2} \ln |2x+1| + C,$$

所以

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{dx}{2x+1} &= \frac{1}{2} \ln |2x+1| \Big|_1^4 \\ &= \frac{1}{2} [\ln |2 \times 4 + 1| - \ln |2 \times 1 + 1|] \\ &= \frac{1}{2} (\ln 9 - \ln 3) \\ &= \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

**说明** 由上面的例题可以看出, 计算定积分可分为两步走, 先用求不定积分的方法求出被积函数的一个原函数, 再代入牛顿-莱布尼茨公式计算出定积分的值.

**例 7**

以  $v_0 = 36 \text{ km/h}$  速度行驶的汽车从某处以等加速度  $a = -5 \text{ m/s}^2$  开始刹车至停止, 求此期间汽车行驶过的距离.

**解** (1) 设开始刹车时  $t=0$ , 已知  $a = -5 \text{ m/s}^2$ , 且

$$v(0) = v_0 = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s},$$

(2) 因为  $v'(t) = \frac{dv}{dt} = a = -5$ , 所以

$$v(t) - v(0) = \int_0^t v'(t) dt = -\int_0^t 5 dt = -5t,$$

(3) 当汽车停止时  $v(t) = 0$ , 那么由  $v(t) = 10 - 5t = 0$ , 得  $t = 2(s)$ ,

(4) 此期间汽车行驶过的距离为

$$s = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (10 - 5t) dt = \left( 10t - \frac{5}{2}t^2 \right) \Big|_0^2 = 10(\text{m}).$$

### 习题 6-3

1. 已知  $f(x) = \int_0^x \cos t dt$ , 求  $f'(0)$ ,  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

2. 求下列函数的导数:

$$(1) f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt;$$

$$(2) f(x) = \int_x^{-1} t \cos t dt;$$

$$(3) f(x) = \int_{\sqrt{2}}^x \cos t^2 \ln(1+t) dt;$$

$$(4) f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t} \sin \sqrt{t} dt.$$

3. 计算下列定积分:

$$(1) \int_{-1}^2 \sqrt[3]{x} dx;$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x) dx;$$

$$(3) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(4) \int_1^2 \frac{1}{2x-1} dx;$$

$$(5) \int_{-2\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{4+x^2};$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cos^2 u du.$$

## 第四节 定积分的换元积分法和分部积分法



定积分的计算

### 一、换元积分法

**定理** 假设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 函数  $x = \varphi(t)$  满足条件:

(1)  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ ;

(2)  $\varphi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  (或  $[\beta, \alpha]$ ) 上具有连续导数, 且其值域不越出  $[a, b]$ ,

则有定积分的换元公式

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (6-4-1)$$

**证明** 因为定积分的值是一个常数, 所以只要证明上式左右两边的值相等.

由假设知,  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上是连续, 因而是可积的;  $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$  在区间  $[\alpha, \beta]$  (或  $[\beta, \alpha]$ ) 上也是连续的, 因而是可积的.

假设  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

另一方面, 因为  $(F[\varphi(t)])' = F'(x)\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ , 所以  $F[\varphi(t)]$  是

$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$  的一个原函数, 从而

$$\int_a^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(a)] = F(b) - F(a).$$

因此

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

 **例 1** 计算  $\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}dx$ .

**解** 令  $u = 1 + x^2$ , 则  $du = 2x dx$ , 即  $x dx = \frac{1}{2} du$ ,

且当  $x = 0$  时,  $u = 1$ , 当  $x = 2$  时,  $u = 5$ ,

$$\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2} \int_1^5 \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| \Big|_1^5 = \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 5.$$

 **例 2** 计算  $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$ .

**解** 由定积分的几何意义, 它表示圆  $x^2 + y^2 \leq a^2$  位于第一象限的面积, 显然是  $\frac{\pi a^2}{4}$ .

下面用定积分的换元积分法来计算并验证.

令  $x = a \sin t$ , 则  $dx = a \cos t dt$ , 且当  $x = 0$  时,  $t = 0$ , 当  $x = a$  时,  $t = \frac{\pi}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t d(2t) \right] \end{aligned}$$

令  $u = 2t$ , 则当  $t = 0$  时,  $u = 0$ , 当  $t = \frac{\pi}{2}$  时,  $u = \pi$ ,

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \frac{a^2}{2} \left[ \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) + \frac{1}{2} \sin u \Big|_0^\pi \right] \\ &= \frac{\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

**说明** (1) 公式(6-4-1)从左到右用, 相当于不定积分的第二换元法, 从右向左用, 就相当于不定积分的第一换元法.

(2) 和不定积分的换元法比较, 在运用定积分的换元积分公式时, 必须在变换积分变量的同时, 把积分上、下限变成新积分变量的上、下限. 如果只运用了换元思想, 并没有把换元的过程写出来, 则不必变换积分限. 如例 1 也可以这样计算:



$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \frac{x}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) \\
 &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_1^2 \\
 &= \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 1) \\
 &= \frac{1}{2} \ln 5.
 \end{aligned}$$

**例 3**

证明偶函数和奇函数在对称区间上的积分有如下性质:

(1) 若  $f(x)$  是偶函数, 则  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ ;

(2) 若  $f(x)$  是奇函数, 则  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

**证明**  $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$ ,

(1) 当  $f(x)$  是偶函数时,  $f(-x) = f(x)$ , 于是

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^0 f(x) dx &= \int_a^0 f(-t) d(-t) \\
 &= - \int_a^0 f(t) dt \\
 &= \int_0^a f(t) dt \\
 &= \int_0^a f(x) dx,
 \end{aligned}$$

所以

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

(2) 当  $f(x)$  是奇函数时,  $f(-x) = -f(x)$ , 于是

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^0 f(x) dx &= \int_a^0 f(-t) d(-t) \\
 &= \int_a^0 f(t) dt \\
 &= - \int_0^a f(t) dt \\
 &= - \int_0^a f(x) dx,
 \end{aligned}$$

所以

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

**说明** 本例的结果可以作为公式使用, 上述结论的几何意义是非常明显的, 如图 6-4-1 所示.

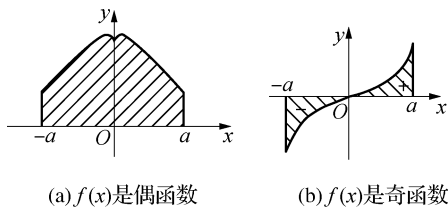


图 6-4-1

**例 4** 计算  $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x \, dx$ .

**解** 因为函数  $f(x) = x^4 \sin x$  是奇函数, 所以  $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x \, dx = 0$ .

## 二、分部积分法

根据不定积分的分部积分法, 可得

$$\begin{aligned}
 \int_a^b u(x)v'(x) \, dx &= \left[ \int u(x)v'(x) \, dx \right]_a^b \\
 &= \left[ u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) \, dx \right]_a^b \\
 &= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) \, dx.
 \end{aligned}$$

简记为

$$\int_a^b uv' \, dx = [uv]_a^b - \int_a^b vu' \, dx.$$

或

$$\int_a^b u \, dv = [uv]_a^b - \int_a^b v \, du.$$

**说明** 在选择  $u(x)$  时, 同样遵循“对、反、幂、三、指”的顺序.

**例 5** 计算定积分  $\int_1^e \ln x \, dx$ .

**解** 设  $u = \ln x$ ,  $v = x$ , 则  $du = \frac{1}{x} dx$ , 所以

$$\begin{aligned}
 \int_1^e \ln x \, dx &= x \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
 &= (e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1) - (e - 1) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

**例 6** 计算定积分  $\int_{-1}^1 x \arctan x \, dx$ .

**解** 设  $u(x) = \arctan x$ ,  $v'(x) = x$ , 则  $du = \frac{1}{1+x^2} dx$ ,  $v(x) = \frac{x^2}{2}$ ,

又  $x \arctan x$  是偶函数, 则

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 x \arctan x \, dx &= 2 \int_0^1 x \arctan x \, dx \\
 &= 2 \left( \frac{1}{2} x^2 \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \right) \\
 &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(1+x^2) - 1}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{\pi}{4} - 1 + \arctan x \Big|_0^1 \\
 &= \frac{\pi}{4} - 1.
 \end{aligned}$$

#### 习题 6-4

1. 计算下列定积分:

$$(1) \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 \, dx;$$

$$(2) \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \, dx;$$

$$(3) \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{1+e^x};$$

$$(4) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

2. 利用奇函数和偶函数的积分性质求下列定积分:

$$(1) \int_{-e}^e \sqrt[3]{x} \ln(1+x^2) \, dx;$$

$$(2) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx;$$

$$(3) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 x \, dx;$$

$$(4) \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x \, dx.$$

3. 计算下列定积分:

$$(1) \int_1^e x \ln x \, dx;$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} x \sin \frac{x}{2} \, dx;$$

$$(3) \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \, dx;$$

$$(4) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} \, dx.$$

## 第五节 定积分的应用



定积分的应用

### 一、定积分的元素法

在引入定积分概念时, 通过分割、近似、求和、取极限的方法, 得出曲边梯形的面积. 我们先回顾一下这个过程.

如图 6-5-1 所示, 设函数  $y = f(x) (f(x) \geq 0)$  在  $[a, b]$  上连续, 求以曲线  $y = f(x)$  为曲边, 底为  $[a, b]$  的曲边梯形的面积. 把这个面积  $A$  表示为定积分

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

的具体步骤如下:

(1) 用任意一组分点把区间  $[a, b]$  分成长度为  $\Delta x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的  $n$  个小区间, 相应地把曲边梯形分成  $n$  个窄曲边梯形, 第  $i$  个窄曲边梯形的面积设为  $\Delta A_i$ , 于是有

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i.$$

(2) 计算  $\Delta A_i$  的近似值

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i).$$

(3) 求和, 得  $A$  的近似值

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

(4) 求极限, 记  $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ , 得

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

在上述过程中我们注意到, 所求量(即面积  $A$ )与区间  $[a, b]$  有关. 如果把区间  $[a, b]$  分成许多部分区间, 那么所求量相应地分成许多部分量(即  $\Delta A_i$ ), 而所求量等于所有部分量之和(即  $A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i$ ), 这一性质称为所求量对于区间  $[a, b]$  具有可加性.

另外, 以  $f(\xi_i) \Delta x_i$  近似代替部分量  $\Delta A_i$  时, 要求它们只相差一个比  $\Delta x_i$  高阶的无穷小, 以使和式的极限  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  是  $A$  的精确值, 从而  $A$  可以表示为定积分

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

通过选取一个小的曲边梯形为代表来研究, 从分析小部分来入手, 最后解决整体, 其实这种分析方法已成为用定积分在解决某些几何或物理中的一种常用方法, 称为定积分的元素法. 在引出  $A$  的积分表达式时, 发现对  $\Delta A_i$  的近似表达是关键,  $\Delta A_i$  的近似值是  $f(\xi_i) \Delta x_i$ , 比较一下这个形式与积分式中的被积式  $f(x) dx$ , 发现如果省略下标  $i$ , 则有  $\Delta A \approx f(\xi) \Delta x$ , 因此  $\Delta A$  表示任一小区间  $[x, x + dx]$  上的窄曲边梯形的面积, 取  $[x, x + dx]$  的左端点  $x$  为  $\xi$ , 以点  $x$  处的函数值  $f(x)$  为高、 $dx$  为底的矩形的面积  $f(x) dx$  为  $\Delta A$  的近似值(图 6-5-2), 即

$$\Delta A \approx f(x) dx,$$

上式右端  $f(x) dx$  称为面积元素, 记为

$$dA = f(x) dx,$$

于是

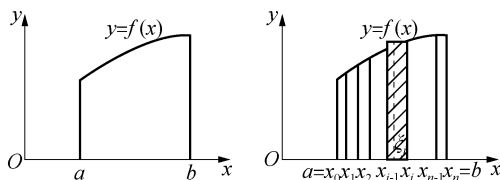


图 6-5-1

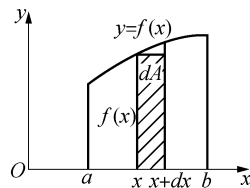


图 6-5-2

$$A \approx \sum f(x) dx,$$

因此

$$A = \lim \sum f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

如果把问题一般化, 某一实际问题中的所求量  $U$  符合下列条件:

- (1)  $U$  是与一个变量  $x$  的变化区间  $[a, b]$  有关的量;  
 (2)  $U$  对于区间  $[a, b]$  具有可加性, 就是说, 如果把区间  $[a, b]$  分成许多部分区间, 则  $U$  相应地分成许多部分量, 而  $U$  等于所有部分量之和;

(3) 部分量  $\Delta U_i$  的近似值可表示为  $f(\xi_i) \Delta x_i$ ;

那么就可考虑用定积分来表示这个量  $U$ . 通常写出这个量  $U$  的积分表达式的步骤是:

1) 根据问题的具体情况, 选取一个变量例如  $x$  为积分变量, 并确定它的变化区间  $[a, b]$ .

2) 设想把区间  $[a, b]$  分成  $n$  个小区间, 取其中任一小区间并记作  $[x, x+dx]$ , 求出相应于这个小区间的部分量  $\Delta U$  的近似值. 如果  $\Delta U$  能近似地表示为  $[a, b]$  上的一个连续函数在  $x$  处的值  $f(x)$  与  $dx$  的乘积, 于是把  $f(x)dx$  称为量  $U$  的元素且记作  $dU$ , 即

$$dU = f(x) dx$$

3) 以所求量  $U$  的元素  $f(x)dx$  为被积表达式, 在区间  $[a, b]$  上作定积分, 得

$$U = \int_a^b f(x) dx$$

这就是所求量  $U$  的积分表达式.

上述方法叫作元素法, 运用这种方法可以讨论几何及物理中的一些问题.

## 二、平面图形的面积

下面我们根据直角坐标系下的曲线方程来建立平面图形面积公式.

在第五章中我们已经知道, 由曲线  $y=f(x)$  ( $f(x) \geq 0$ ) 及直线  $x=a$ ,  $x=b$  ( $a < b$ ) 与  $x$  轴所围成的曲边梯形的面积  $A$  是定积分

$$A = \int_a^b f(x) dx,$$

其中被积表达式  $f(x)dx$  就是直角坐标下的面积元素, 它表示高为  $f(x)$ 、底为  $dx$  的一个矩形面积.

应用定积分, 还可以计算一些比较复杂的平面图形 (图 6-5-3) 的面积, 两条连续曲线  $y=f(x)$  与  $y=g(x)$  及直线  $x=a$ ,  $x=b$  所围成的平面图形的面积.

由于面积  $A$  是非均匀连续分布在区间上且对区间  $[a, b]$  具有可加性的量, 所以面积  $A$  可以用定积分来计算.

根据元素法, 取  $[a, b]$  上的标准子区间  $[x, x+dx]$ , 在其上小曲边梯形  $ABCD$  的高可近似看成不变的, 它的面积  $\Delta A$  可以用高为  $AD$ , 宽为  $dx$

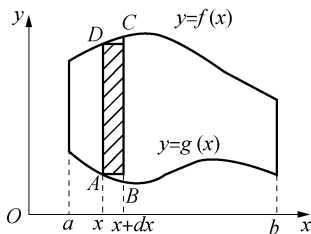


图 6-5-3

的小矩形的面积近似代替, 即

$$\Delta A = |f(x) - g(x)| dx$$

于是所求图形的面积

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

特别地, 如果  $g(x)=0$ , 由连续函数  $y=f(x)$ 、 $x$  轴及两直线  $x=a$ ,  $x=b$  所围成的平面图形的面积为

$$A = \int_a^b |f(x)| dx.$$



**例 1** 求由抛物线  $y=x^2$  与  $y^2=x$  所围成的平面图形(图 6-5-4)的面积  $A$ .

**解** 这两条抛物线所围成的图形如图 6-5-4 所示. 为了具体定出图形的所在范围, 先求出这两条抛物线的交点. 因此, 解方程组

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x, \end{cases}$$

求得交点  $(0, 0)$  与  $(1, 1)$ , 从而知道这图形在直线  $x=0$  与  $x=1$  之间.

取横坐标  $x$  为积分变量, 它的变化区间为  $[0, 1]$ , 相应于  $[0, 1]$  上的任一小区间  $[x, x+dx]$  的窄条的面积近似于高为  $\sqrt{x} - x^2$ , 底为  $dx$  的窄矩形的面积, 从而得到面积元素

$$dA = (\sqrt{x} - x^2) dx.$$

以  $(\sqrt{x} - x^2)dx$  为被积表达式, 在闭区间  $[0, 1]$  上作定积分, 便得所求面积为

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

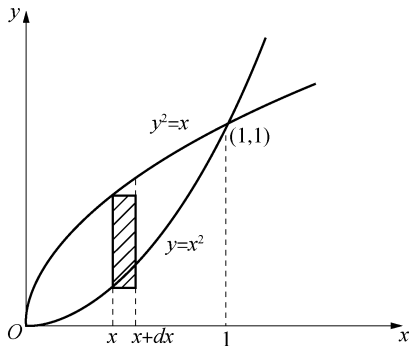


图 6-5-4



**例 2** 求由抛物线  $y^2=2x$  与直线  $y=x-4$  所围成的平面图形(图 6-5-5)的面积.

**解** 为了定出这个图形所在的范围, 先求出所给抛物线和直线的交点. 解方程组

$$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ y = x - 4, \end{cases}$$

求得交点  $A(2, -2)$  和  $B(8, 4)$ .

此时, 取  $y$  为积分变量比较方便, 相应的积分区间为  $[-2, 4]$ , 于是

$$S = \int_{-2}^4 \left[ (y+4) - \frac{1}{2}y^2 \right] dy = \left( \frac{1}{2}y^2 + 4y - \frac{1}{6}y^3 \right) \Big|_{-2}^4 = 18.$$

如果选用  $x$  作为积分变量, 则可以转化为两部分求解, 如图 6-5-6 所示

$$A = \int_0^2 [\sqrt{2x} - (-\sqrt{2x})] dx + \int_2^4 [\sqrt{2x} - (x-4)] dx.$$

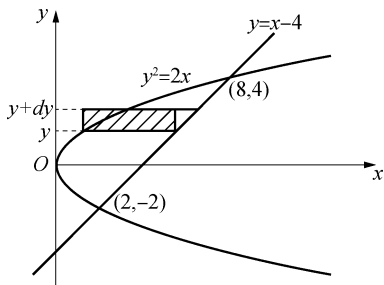


图 6-5-5

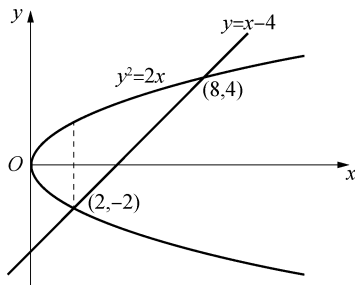


图 6-5-6

### 三、旋转体的体积

一个平面图形绕这个平面内一条定直线旋转一周而形成的几何体称为旋转体. 应用定积分的元素法不但可以计算平面图形的面积, 也可求解旋转体的体积.

如图 6-5-7 所示, 旋转体是由连续曲线  $y=f(x)$  与直线  $x=a$ ,  $x=b$  以及  $x$  轴所围成的曲边梯形绕  $x$  轴旋转一周而形成的.

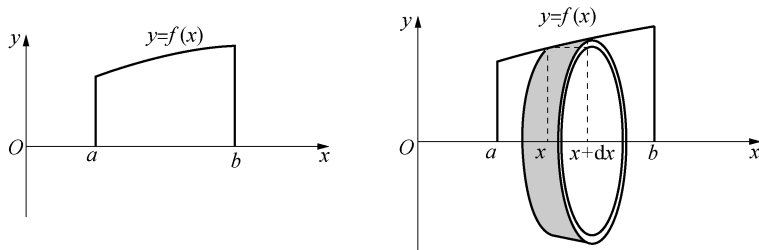


图 6-5-7

选取  $x$  为积分变量, 积分区间为  $[a, b]$ , 相应于  $[a, b]$  上的任一小区间  $[x, x+dx]$  的窄曲边梯形绕  $x$  轴旋转而成的薄片的体积近似于以  $f(x)$  为底面半径、 $dx$  为高的圆柱体的体积(即体积的微元)  $dV = \pi [f(x)]^2 dx$ , 所以该旋转体的体积为

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx.$$

类似地, 由连续曲线  $x=\varphi(y)$  与直线  $y=c$ ,  $y=d$  ( $c < d$ ) 以及  $y$  轴所围成的曲边梯形绕  $y$  轴旋转一周形成的旋转体的体积为

$$V = \int_c^d \pi [\varphi(y)]^2 dy.$$

**例 3** 求椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  绕  $x$  轴旋转所得旋转椭球体的体积.

**解** 由椭圆方程  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  解得

$$y^2 = b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \quad -a \leq x \leq a$$

这个旋转体可以看成由上半个椭圆  $y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$  及  $x$  轴围成的图形绕  $x$  轴旋转一周形成的. 见图 6-5-8.

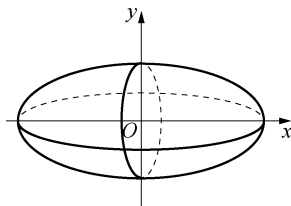


图 6-5-8

设  $x$  为积分变量, 积分区间为  $[-a, a]$ , 于是该旋转椭球体的体积为

$$V = \pi \int_{-a}^a b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = 2\pi b^2 \int_0^a \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = 2\pi b^2 \left( x - \frac{x^3}{3a^2} \right) \Big|_0^a = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

特别地, 当  $a = b$  时, 就得到半径为  $a$  的球的体积为  $V = \frac{4}{3} \pi a^3$ .

又如果把该椭圆绕  $y$  轴旋转, 则所得的旋转体的体积为

$$V = \pi \int_{-b}^b x^2 dy = \pi \int_{-b}^b a^2 \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right) dy = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

**例 4** 求高为  $h$ , 底面半径为  $r$  的圆锥体的体积  $V$ .

**解** 把圆锥体可以看成直线段  $y = \frac{r}{h}x$  ( $0 \leq x \leq h$ ) 与直线  $x = h$ 、 $x$  轴所围成的图形绕  $x$  轴旋转一周所形成的旋转体. 于是有

$$V = \pi \int_0^h [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^h \left( \frac{r}{h}x \right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

#### 四、平面曲线的弧长

如果函数  $f(x)$  有连续导数(曲线上每一点处都具有切线, 且切线随切点的移动而连续转动), 这样的曲线称为光滑曲线. 光滑曲线是可以求长的.

如图 6-5-9, 设曲线  $y = f(x)$  是光滑的, 则对应于小区间  $[x, x + dx]$  的一小段弧长  $\Delta s$ , 可以用该曲线在点  $(x, f(x))$  处的切线上相应的一小段线段的长来近似代替, 这小段直线段的长度为

$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (y' dx)^2} = \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

从而得到弧长微元的表达式

$$\Delta s \approx ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

所以弧长为

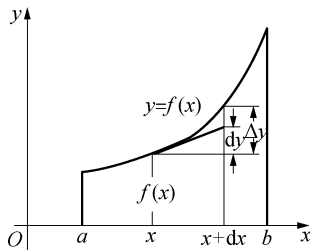


图 6-5-9



$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

 **例 5** 求曲线  $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$  上相应于  $x$  从  $a$  到  $b$  的一段弧的长度.

**解**  $y' = x^{\frac{1}{2}}$ , 从而弧长元素

$$ds = \sqrt{1 + (x^{\frac{1}{2}})^2} dx = \sqrt{1 + x} dx.$$

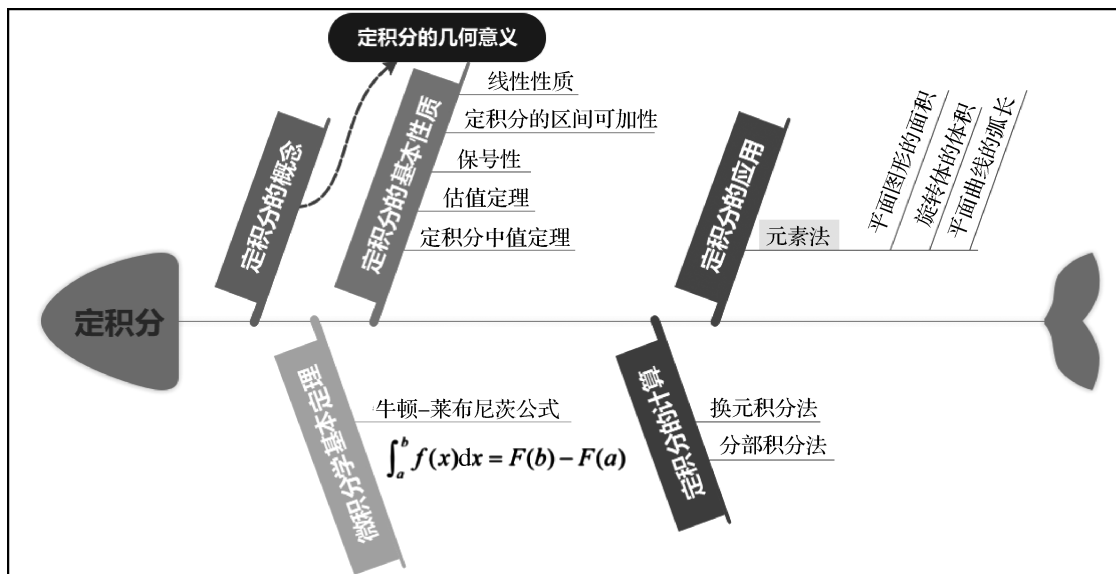
因此, 所求的弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \Big|_a^b = \frac{2}{3}[(1+b)^{\frac{3}{2}} - (1+a)^{\frac{3}{2}}].$$

### 习题 6-5

1. 求椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的面积.
2. 求曲线  $y = \sqrt{x}$  与直线  $y = x$  所围图形的面积.
3. 求直线  $y = x$ ,  $y = 2x$  与  $y = 2$  所围三角形的面积.
4. 抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2$  将圆  $x^2 + y^2 \leq 8$  分割成两部分, 分别求这两部分的面积.
5. 求双曲线  $xy = 1$  与直线  $y = x$ 、 $y = 2$  所围部分的面积.
6. 将下列曲线绕  $x$  轴旋转, 求所围成的旋转体的体积:
  - (1)  $y = \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ;
  - (2)  $y = 2x^{\frac{2}{3}}$ ,  $0 \leq x \leq 8$ ;
  - (3)  $x + y = 4$ ,  $0 \leq x \leq 4$ .
7. 求下列曲线的弧长:
  - (1)  $y = x^{\frac{3}{2}}$ ,  $0 \leq x \leq 8$ ;
  - (2) 半径为  $R$  的圆的周长.

## 鱼骨图小结



## 总习题六

## 一、单选题

1. 下列积分中, 值为零的是( ).

- A.  $\int_{-1}^1 x^2 dx$       B.  $\int_{-1}^1 x^4 dx$       C.  $\int_{-1}^1 dx$       D.  $\int_{-1}^1 x^2 \sin x dx$

2. 设  $f(x)$  为  $R$  上的连续函数, 则下列各式正确的是( ).

- A.  $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = f(x)$       B.  $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) dx$   
 C.  $\frac{d}{dx} \int_x^a f(t) dt = f(x)$       D.  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$

3. 定积分  $\int_a^b f(x) dx$  由以下哪项决定? ( ).

- A. 积分变量与积分区间      B. 被积函数与积分区间  
 C. 积分变量与被积函数      D. 以上各项都不对

4.  $\frac{d}{dx} \left[ \int_a^b f(x) dx \right] = ( )$ .

- A.  $f(x)$       B.  $f(x) + C$       C. 0      D.  $f'(x)$

5. 下列式子正确的是( ).

A.  $\int_1^2 (\ln x)^2 dx > \int_1^2 \ln x dx$

B.  $\int_1^2 (\ln x)^2 dx = \int_1^2 \ln x dx$

C.  $\int_1^2 (\ln x)^2 dx < \int_1^2 \ln x dx$

D. 以上都不正确

6.  $\frac{d}{dx} \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt = ( \quad )$ .

A.  $\cos x$

B.  $|\cos x|$

C.  $-\cos^2 x$

D.  $|\cos x| \cdot \cos x$

7. 设  $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+x^2} dx$ ,  $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^2 x) dx$ ,  $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x \sin^2 x - \cos^3 x) dx$ ,

则有( ).

A.  $N < P < M$

B.  $N < M < P$

C.  $N > P > M$

D.  $N > M > P$

8. 设  $f(0)=1$ ,  $f(1)=3$ ,  $f'(1)=3$ , 则  $\int_0^1 x f''(x) dx = ( \quad )$ .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

9. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则曲线  $y=f(x)$  与直线  $x=a$ ,  $x=b$ ,  $y=0$  所围成的平面图形的面积为( ).

A.  $\int_a^b f(x) dx$

B.  $\left| \int_a^b f(x) dx \right|$

C.  $\int_a^b |f(x)| dx$

D.  $f'(\xi)(b-a)$ ,  $a < \xi < b$

10. 设  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  的一个原函数, 则必有( ).

A.  $F(x)$  是偶函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是奇函数

B.  $F(x)$  是奇函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是偶函数

C.  $F(x)$  是周期函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是周期函数

D.  $F(x)$  是单调函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是单调函数

## 二、填空题

1. 设  $\int_0^1 (3x^2 + k) dx = 3$ , 则  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. (2021 年) 设  $\ln(1+x^2)$  是函数  $f(x)$  的一个原函数, 则  $\int_0^1 f'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 设  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的连续函数, 则  $\int_3^4 f(x) dx + \int_4^1 f(t) dt + \int_1^3 f(u) du = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 利用定积分的几何意义计算  $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则  $\int_a^b f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

6. 设  $f(x) = \int_{x^2}^4 \sqrt{t^2 + 1} dt$ , 则  $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

7. 若  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ , 则  $\int_0^2 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .



8. 设  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的连续函数, 则  $\int_0^a f(x) dx - \int_0^a f(a-x) dx =$  \_\_\_\_\_.

9. 椭圆  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  的面积为 \_\_\_\_\_.

10. 曲线  $y = x^3$  及  $y = 0$ ,  $x = 2$  所围平面图形绕  $x$  轴旋转的旋转体体积  $V =$  \_\_\_\_\_.

### 三、计算题

1.  $\int_0^3 |1-x| dx$ ;

2.  $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$ ;

3.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ ;

4. (2021 年)  $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$ .

### 四、解答题

1. 求由抛物线  $y = x^2$  和直线  $y = x$  及  $y = 2x$  所围成的图形的面积.

2. 平面图形由  $y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 和  $x$  轴围成, 试求该图形分别绕  $x$  轴、 $y$  轴旋转所得旋转体的体积.

3. 已知  $\frac{\sin x}{x}$  是  $f(x)$  的一个原函数, 求  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f'(x) dx$ .

4. (2020 年) 设平面图形  $D$  由曲线  $y = e^x$  与其在点  $(0, 1)$  处的法线及直线  $x = 1$  所围成. 试求: (1) 平面图形  $D$  的面积; (2) 平面图形  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

5. 设  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + x^3 \int_0^1 f(x) dx$ , 求  $\int_0^1 f(x) dx$ .

## 再攀课程高峰 绘制工匠蓝图——多元函数的微积分

## 课程思政元素

多元函数的微积分可以帮助我们求解多元方程组、优化问题、曲面积分等复杂的数学问题. 通过多元函数的微积分, 我们可以深入理解空间中的曲线、曲面和体积的变化规律, 从而更好地理解自然界和科学中的现象.

“横看成岭侧成峰, 远近高低各不同. 不识庐山真面目, 只缘身在此山中.”人生总会跌宕起伏, 在低谷不气馁, 在高峰不张扬. 学会用运动的观点看待问题.

多元函数的微积分是一元函数微积分的推广, 有的结论可以直接推广而得, 有的结论变得完全不同. 学会用类比的方法研究问题.

在数学的天地里, 重要的不是我们知道什么, 而是我们怎么知道什么.

——毕达哥拉斯

在实际应用中, 所出现的函数的自变量往往不只一个, 从变量关系的角度来看, 就是依赖于多个变量的函数, 叫作多元函数. 多元函数的微积分与一元函数的微积分有诸多相似的地方, 但也有一些区别. 本章主要通过类比的方法研究多元函数的微积分及其应用, 重点讨论二元函数的微积分问题.

下面先简单介绍空间解析几何中的一些基本概念.

## 第一节 空间直角坐标系

**引例 1** 北斗卫星导航系统(Beidou navigation satellite system, BDS)是我国自行研制的全球卫星导航系统. 可在全球范围内全天候、全天时为各类用户提供高精度、高可靠定位、导航、授时服务, 并且具备短报文通信能力, 已经初步具备区域导航、定位和授时能力, 定位精度为分米、厘米级别. 那么北斗导航是如何确定飞机的具体位置的?

显然, 不能用平面直角坐标系来确定飞机的具体位置. 因为飞机除了有水平位置的变化, 还有垂直高度的变化. 要解决这个问题, 必须用到“空间直角坐标系”.

## 一、空间直角坐标系

在空间取定一点  $O$ ，过点  $O$  作三条两两垂直的数轴，它们都以  $O$  为原点且具有相同的单位长度，这三条轴依次记为  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴，统称为坐标轴，称  $O$  为坐标原点，通常把  $x$  轴和  $y$  轴配置在水平面上，而  $z$  轴在铅垂方向上，且这三条数轴的正向满足右手法则，即以右手握住  $z$  轴，当右手的四个手指从正向  $x$  轴以  $90^\circ$  的角度转向正向  $y$  轴时，拇指的指向就是  $z$  轴的正向，如图 7-1-1.

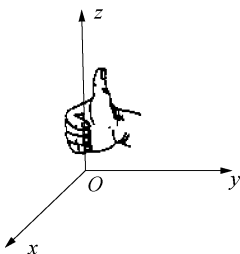


图 7-1-1

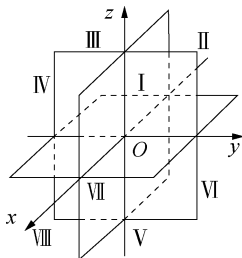


图 7-1-2

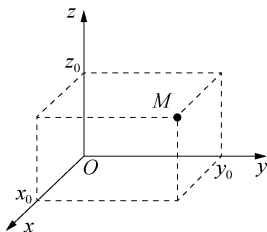


图 7-1-3

每两条坐标轴确定一个平面，分别记为  $xOy$  面、 $yOz$  面和  $zOx$  面，它们统称为坐标面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限. 其中，在  $xOy$  面上方且  $yOz$  面前方、 $zOx$  面右方的那个卦限为第 I 卦限，面  $xOy$  上方的其他三个卦限按逆时针方向依次记为第 II、III、IV 卦限，它们分别对应下半空间的第 V、VI、VII 和 VIII 卦限，如图 7-1-2.

空间坐标系的建立，使得空间的任意一个点  $M$  与有序实数对  $(x_0, y_0, z_0)$  之间建立了一一对应的关系，如图 7-1-3. 有了空间直角坐标系，就能定位飞机的具体位置.

### 空间两点间的距离

已知空间两点  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ，则此两点间的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

特别地，空间任一点  $M(x, y, z)$  与坐标原点  $O(0, 0, 0)$  的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



### 例 1

在  $z$  轴上求与  $M_1(1, -1, 1)$ ,  $M_2(2, 1, -1)$  两点等距离的点  $M$  的坐标.

**解** 由于所求的点  $M$  在  $z$  轴上，所以设该点坐标为  $(0, 0, z)$ ，依题意有

$$|MM_1| = |MM_2|,$$

即

$$\sqrt{(0-1)^2 + (0+1)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(0-2)^2 + (0-1)^2 + (z+1)^2}.$$

整理得

$$z = -\frac{3}{4},$$

所以, 所求的点  $M$  的坐标为  $\left(0, 0, -\frac{3}{4}\right)$ .

## 二次曲面简介

### 1. 曲面方程的概念

在日常生活中, 经常会看到各种曲面, 如汽车反光镜的镜面、球面、锥面等. 在平面解析几何中把平面曲线看作是动点的轨迹, 类似地, 在空间解析几何中曲面也可以看作是动点的轨迹.

如果曲面  $S$  与三元方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (7-1-1)$$

满足条件:

- (1) 曲面  $S$  上任意一点的坐标都满足方程(7-1-1);
- (2) 不在曲面  $S$  上的点的坐标都不满足方程(7-1-1)

那么, 方程(7-1-1)称为曲面  $S$  的方程, 而曲面  $S$  称为方程(7-1-1)的图形, 如图 7-1-4 所示.

**例 2** 求与点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  的距离恒为常数  $R(R > 0)$  的动点  $M$  的轨迹方程.

**解** 设  $M$  的坐标为  $(x, y, z)$ , 根据题意有

$$|MM_0| = R,$$

所以有

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R,$$

即

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2. \quad (7-1-2)$$

式(7-1-2)称为球面方程, 点  $M_0$  称为球心,  $R$  称为球半径. 图形如图 7-1-5 所示.

特别地, 球心在原点时, 球面的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

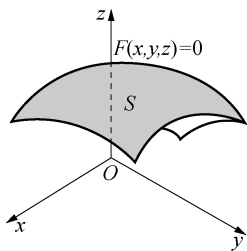


图 7-1-4

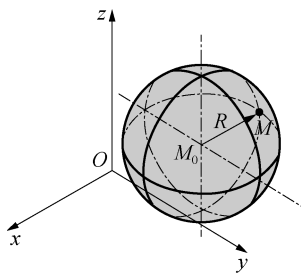


图 7-1-5

**例 3** 方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 0$  表示怎样的曲面?

**解** 对原方程配方, 得

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 5.$$

所以, 原方程表示球心在点  $(2, -1, 0)$ , 半径为  $\sqrt{5}$  的球面方程. 如图 7-1-6 所示.

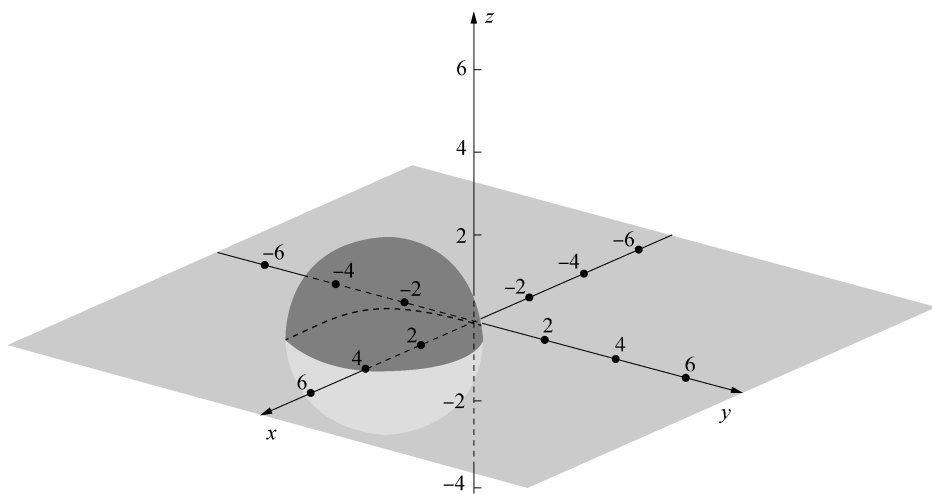


图 7-1-6

**例 4** 设有点  $M_1(1, -1, 1)$  和  $M_2(2, 1, -1)$ , 求与点  $M_1$ 、 $M_2$  等距的动点  $M$  的轨迹方程.

**解** 设动点为  $M(x, y, z)$ , 由题意有

$$|MM_1| = |MM_2|.$$

根据两点间的距离公式, 有

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}.$$

化简得

$$2x + 4y - 4z - 3 = 0.$$

此方程是一个含有三个未知数的三元一次方程, 是一个垂直且平分线段  $M_1M_2$  的平面, 如图 7-1-7 所示.

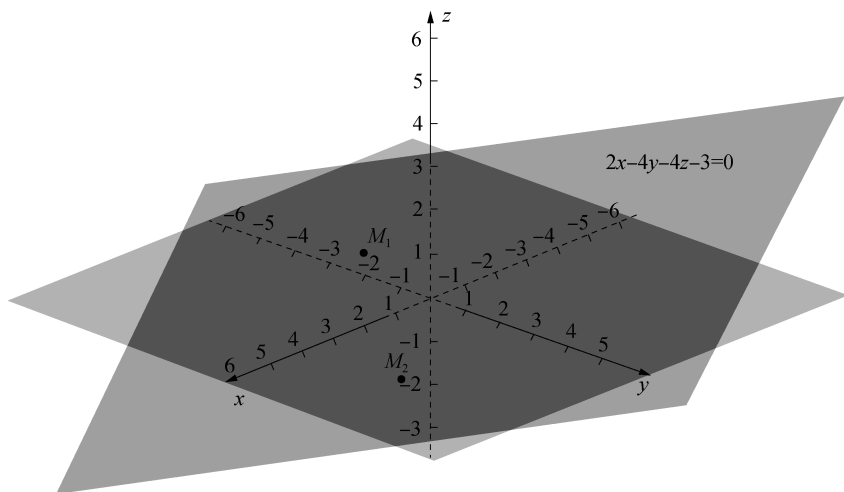


图 7-1-7



一般地, 含有三个未知数的三元一次方程  $Ax + By + Cz + D = 0$  ( $A$ 、 $B$ 、 $C$  不同时为零) 表示空间的一个平面.

## 2. 旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条定直线旋转一周所成的曲面叫作旋转曲面, 旋转曲线和定直线依次叫作旋转曲面的母线和轴.

设在平面  $yOz$  上有一已知曲线  $C$ , 它的方程为

$$f(y, z) = 0,$$

把这条曲线绕  $z$  轴旋转一周, 就得到一个以  $z$  轴为旋转轴的旋转曲面(如图 7-1-8). 它的方程可以如下求得:

设  $M_1(0, y_1, z_1)$  为曲线  $C$  上的任意一点, 则有

$$f(y_1, z_1) = 0. \quad (7-1-3)$$

当曲线  $C$  绕  $z$  轴旋转时, 点  $M_1$  绕  $z$  轴转到另一点  $M(x, y, z)$ , 这时  $z = z_1$  保持不变, 且点  $M$  到  $z$  轴的距离

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1|.$$

将  $z_1 = z$ ,  $y_1 = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$  代入(7-1-3)式, 就有

$$f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (7-1-4)$$

这就是所求旋转曲面的方程.

由此可知, 在曲线  $C$  的方程  $f(y, z) = 0$  中将  $y$  改成  $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$ , 便得到曲线  $C$  绕  $z$  轴旋转所成的旋转曲面的方程. 同理, 曲线  $C$  绕  $y$  轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0. \quad (7-1-5)$$

例如, 将  $xOy$  平面上的椭圆  $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ , 如图 7-1-9, 分别绕  $x$  轴和  $y$  轴旋转一周, 所生成的旋转曲面的方程分别为  $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2 + z^2}{3^2} = 1$  和  $\frac{x^2 + z^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ , 对应的图形如图 7-1-10 和图 7-1-11 所示.

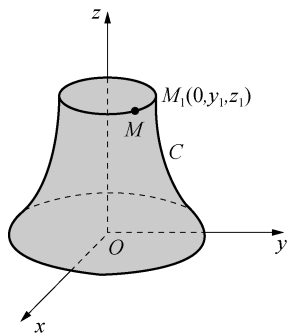


图 7-1-8

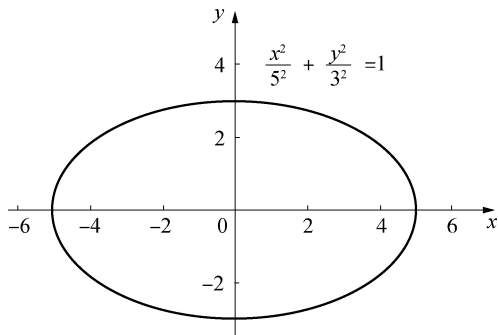


图 7-1-9

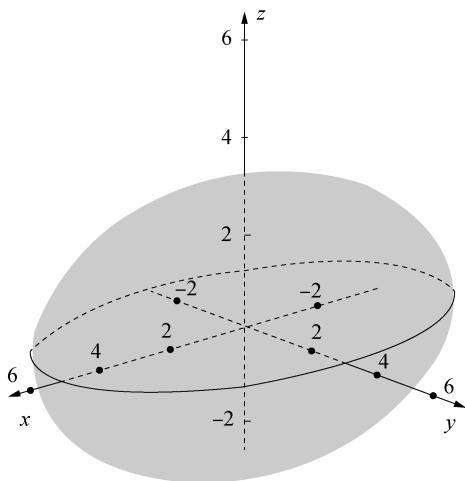


图 7-1-10

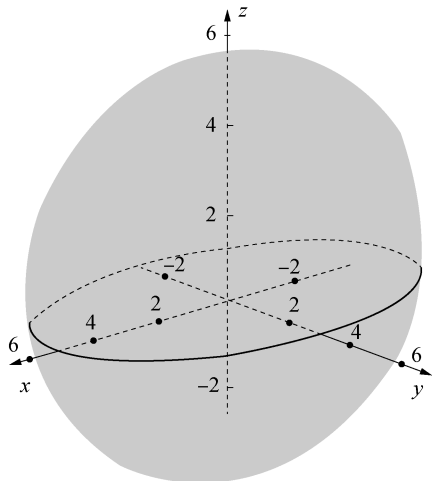


图 7-1-11

### 3. 柱面

一动直线  $L$  沿定曲线  $C$  平行移动形成的轨迹叫作柱面，定曲线  $C$  叫作柱面的准线，动直线  $L$  叫作柱面的母线。

我们通常遇到的是母线平行于坐标轴的柱面，如图 7-1-12 和图 7-1-13 所示，分别表示圆柱面和抛物柱面。方程  $x^2 + y^2 = R^2$  在空间直角坐标系中表示母线  $l$  平行于  $z$  轴，准线是  $xOy$  面上的圆  $x^2 + y^2 = R^2$  的圆柱面。方程  $y^2 = 2x$  表示母线平行于  $z$  轴，准线是  $xOy$  面上的抛物线  $y^2 = 2x$  的抛物柱面。

在  $xOy$  面内， $x^2 + y^2 = R^2$  表示一个圆，但在空间直角坐标系中，它却表示上述的圆柱面。事实上，设  $M(x, y, z)$  是圆柱面上任意一点，过点  $M$  作  $z$  轴的平行线交  $C$  于点  $M_0(x, y, 0)$ ，如图 7-1-14 所示，因为点  $M_0$  在  $C$  上，所以有

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

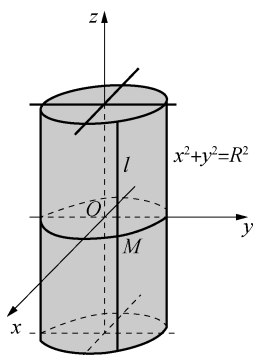


图 7-1-12

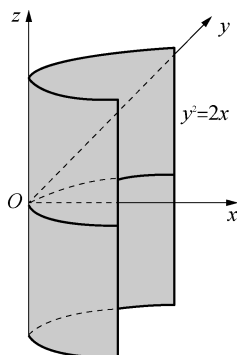


图 7-1-13

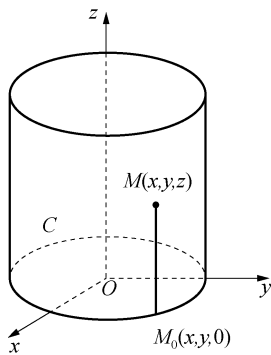


图 7-1-14

又由于上述方程不含  $z$ ，所以点  $M$  的坐标也满足此方程，这就是说，圆柱面上的任意一点  $M$  的坐标满足方程  $x^2 + y^2 = R^2$ 。反之，不在圆柱面上的点的坐标一定不满足方程

$x^2 + y^2 = R^2$ . 根据曲面的定义,  $x^2 + y^2 = R^2$  表示一个母线平行于  $z$  轴的圆柱面.

#### 4. 二次曲面

与平面解析几何中的二次曲线类似, 三元二次方程  $F(x, y, z) = 0$  所表示的曲面称为二次曲面, 而平面称为一次曲面.

一般来说, 二次曲面的图形难以用描点法得到, 常用坐标平面或平行于坐标平面的平面与所讨论的二次曲面相截, 然后考察其截痕的图形来想象该曲面的空间形状.

下面举几个常用的二次曲面的标准方程及其几何图形.

(1) 椭圆锥面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$

用平面  $z = t$  去截此曲面, 当  $t = 0$  时得到一点  $(0, 0, 0)$ ; 当  $t \neq 0$  时, 得到平面上的椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2} + \frac{y^2}{(bt)^2} = 1.$$

当  $t$  变化时, 上式表示一族长短轴之比不变的椭圆, 当  $|t|$  从大到小变为 0 时, 这族椭圆从大到小并缩为一点, 由此得到椭圆锥面的形状如图 7-1-15 所示.

(2) 椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

用平面  $z = t$  去截此曲面, 曲面方程变为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - t^2}{c^2}.$$

记  $s^2 = \frac{c^2 - t^2}{c^2}$ , 则上式转化为

$$\frac{x^2}{(as)^2} + \frac{y^2}{(bs)^2} = 1.$$

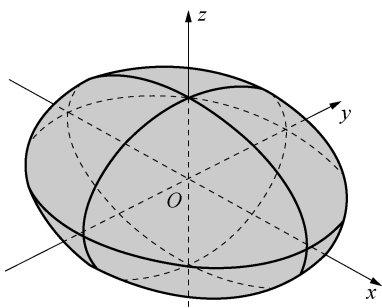


图 7-1-16

当  $t = \pm c$  时,  $s = 0$ , 它表示两个点  $(0, 0, c)$ ,  $(0, 0, -c)$ . 当  $|t|$  从  $c$  开始慢慢变小到 0 时,  $s$  则从 0 慢慢变大到 1, 从而得到一族长短轴之比不变的椭圆. 类似地, 用平面  $x = t$  和平面  $y = t$  去截曲面时, 也得到一族长短轴之比不变的椭圆, 由此得到椭球面的形状如图 7-1-16 所示.

(3) 单叶双曲面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

用平面  $z = t$  去截此曲面, 当  $t = 0$  时得到平面  $xOy$  上的一个椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 当  $t \neq 0$  时, 得到方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 + t^2}{c^2}.$$

记  $s^2 = \frac{c^2 + t^2}{c^2}$  ( $s > 0$ ), 则上式转化为

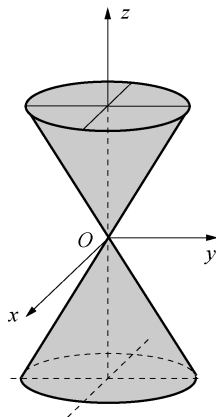


图 7-1-15

$$\frac{x^2}{(as)^2} + \frac{y^2}{(bs)^2} = 1.$$

当  $|t|$  慢慢变大时,  $s$  也慢慢变大, 也得到一族长短轴之比不变的椭圆, 只是长短轴的长不断增大. 形状如图 7-1-17 所示.

$$(4) \text{ 双叶双曲面 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

把  $xOz$  面上的双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  绕  $x$  轴旋转, 得到  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$  旋转双叶双曲面, 把此旋转曲面沿  $y$  轴方向伸缩  $\frac{b}{c}$  倍(即曲面上的每一点的  $x$  坐标和  $z$  坐标不变,  $y$  坐标变为原来的  $\frac{b}{c}$  倍), 即得单叶双曲面. 如图 7-1-18 所示.

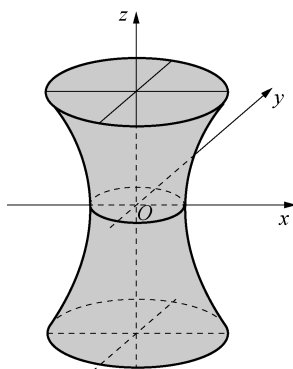


图 7-1-17

$$(5) \text{ 椭圆抛物面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

用平面  $z = t$  去截此曲面, 当  $t = 0$  时得到一点  $(0, 0, 0)$ ; 当  $t > 0$  时, 得到平面上的椭圆

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{t})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{t})^2} = 1.$$

类似上面的分析, 其形状如图 7-1-19 所示.

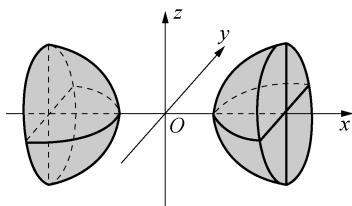


图 7-1-18

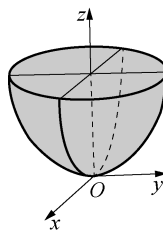


图 7-1-19

$$* (6) \text{ 双曲抛物面 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

双曲抛物面又称马鞍面, 我们用截痕法来讨论其形状.

用平面  $x = t$  去截此曲面, 所得截痕  $l$  为平面  $x = t$  上的抛物线

$$-\frac{y^2}{b^2} = z - \frac{t^2}{a^2}.$$

此抛物线开口向下, 顶点坐标为

$$x = t, y = 0, z = \frac{t^2}{a^2}.$$

当  $t$  变化时,  $l$  的形状不变, 位置只作平移, 而  $l$  的顶点的轨迹  $L$  为  $y = 0$  平面上的抛物线

$$z = \frac{x^2}{a^2}.$$

因此, 以  $l$  为母线,  $L$  为准线, 母线  $l$  的顶点在准线  $L$  上滑动, 且母线作平行移动, 这样得到的曲面便是双曲抛物面. 其形状如图 7-1-20 所示.

### 习题 7-1

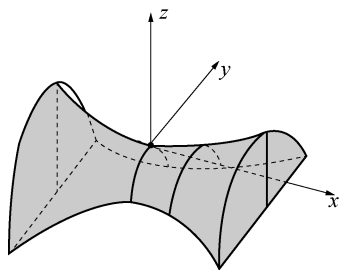


图 7-1-20

1. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点所在的卦限或位置的特殊性.

$$A(2, 1, 2); B(-2, 1, 3); C(1, -1, -3);$$

$$D(1, 0, 0); E(0, 1, 1)$$

2. 已知点  $A(2, 1, 2); B(t, 1, 3)$ , 若  $A, B$  两点的距离为 5, 求  $t$  的值.

3. 把球面方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - 7 = 0$  化为标准方程, 并指出球心坐标和球的半径.

4. 指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形.

$$(1) x = 3;$$

$$(2) y = x - 1;$$

$$(3) x^2 + y^2 = 9;$$

$$(4) x^2 - y^2 = 1.$$

5. 说明下列旋转曲面是怎样形成的.

$$(1) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1;$$

$$(2) x^2 - \frac{y^2}{9} + z^2 = 1;$$

$$(3) x^2 - y^2 - z^2 = 1;$$

$$(4) x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

6. 将  $xOy$  坐标平面上的双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  分别绕  $x$  轴及  $y$  轴旋转一周, 求生成的旋转曲面的方程.

## 第二节 二元函数的极限和连续性

函数是变量相依关系的数学模型, 是研究客观世界变化规律的一个最重要的数学工具. 在工程、经济学等领域都有广泛的应用. 本节基于一元函数的极限和连续性基础上, 研究二元函数的极限及其连续性.

### 1. 二元函数

在很多自然现象以及实际问题中, 经常会遇到多个变量之间的依赖关系, 例如:

**引例 1** 圆柱的体积  $V$  和它的底半径  $r$ 、高  $h$  之间具有的关系式

$$V = \pi r^2 h \quad (r > 0, h > 0).$$

其中体积  $V$  是它的底半径  $r$ 、高  $h$  两个变量的函数.

**引例 2** 设  $R$  是电阻  $R_1$  和  $R_2$  并联后的总电阻, 由电学知识可知, 它们之间具有关

系式

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (R_1 > 0, R_2 > 0).$$

**引例 3** 一定量的理想气体的压强  $p$ 、体积  $V$  和绝对温度  $T$  之间具有关系式

$$p = \frac{RT}{V} \quad (R \text{ 为常数}).$$

上面三个例子虽然具体意义不同,但是它们有共同的性质,抽取这些共性可以得出二元函数的定义.

下面先引入平面区域和邻域的概念.

### 定义 1 平面区域

由  $xOy$  面上的一条或几条曲线所围成的一部分平面或整个平面,称为平面区域,简称区域.围成区域的曲线称为区域的边界;边界上的点称为边界点;包含边界的区域称为闭区域,不包含边界的区域称为开区域.

如果区域内任意两点之间的距离不超过某一个常数  $M (M > 0)$ ,那么称这个区域是有界的,否则是无界的区域.例如

$D = \{(x, y) \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$  表示整个  $xOy$  平面,是无界区域;

$D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$  是有界闭区域(图 7-2-1);

$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$  是有界开区域(图 7-2-2).

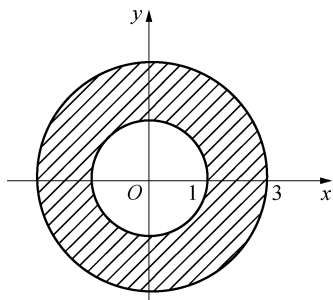


图 7-2-1

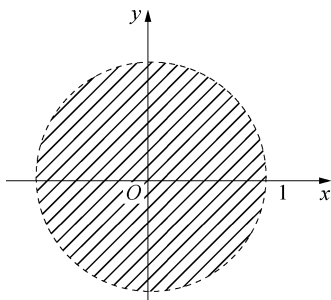


图 7-2-2

### 定义 2 邻域

平面上与点  $P_0(x_0, y_0)$  距离小于  $\delta (\delta > 0)$  的点  $P(x, y)$  的全体所构成的集合称为点  $P_0$  的  $\delta$  邻域,记作  $U(P_0, \delta)$ ,即  $U(P_0, \delta) = \{P \mid |P_0 P| < \delta\}$ ,也就是

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}.$$

从图形上看,  $U(P_0, \delta)$  指以  $P_0(x_0, y_0)$  为中心,  $\delta$  为半径的圆内部的点  $P(x, y)$  的全体.

### 定义 3 二元函数

设有变量  $x, y$  和  $z$ ,  $D$  是平面上的一个区域.如果对于每一个点  $P(x, y) \in D$ , 变量  $z$  按照一定的法则总有确定的值与之对应,则称  $z$  是变量  $x, y$  的二元函数,记为

$$z = f(x, y).$$

区域  $D$  称为该函数的定义域,  $x, y$  称为自变量,  $z$  称为因变量.

数集  $\{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$  称为该函数的值域.

类似可以定义三元函数  $u = f(x, y, z)$  及三元以上的函数. 我们常把二元及二元以上的函数称为多元函数.

二元函数的定义域通常是平面上的一个区域. 一般地, 函数  $z = f(x, y)$  的定义域是使函数  $f(x, y)$  有意义的点的集合, 但如果是实际问题, 则应该根据其实际意义来决定其取值范围.

例如, 函数  $z = \ln(x+y)$  的定义域为  $\{(x, y) \mid x+y > 0\}$ , 这是一个无界开区域. 又如, 函数  $z = \arcsin(x^2 + y^2)$  的定义域为  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 这是一个有界闭区域.

设函数  $z = f(x, y)$  的定义域为  $D$ . 对于任意取定的点  $P(x, y) \in D$ , 对应的函数值为  $z = f(x, y)$ . 这样, 以  $x$  为横坐标,  $y$  为纵坐标和  $z = f(x, y)$  为竖坐标在空间就确定一点  $M(x, y, z)$ , 当  $(x, y)$  取遍  $D$  上的一切点时, 得到一个空间点集

$$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}.$$

这个点集称为二元函数  $z = f(x, y)$  的图形(图 7-2-3).

通常我们称二元函数的图形为一张曲面.

例如, 线性函数  $z = ax + by + c$  的图形是一张平面. 由方程  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  确定的函数的图形是球心在原点, 半径为 3 的球面, 它的定义域是圆形闭区域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$ .

对  $D$  的内部任意一点  $(x, y)$  处, 有两个函数值  $z = \pm\sqrt{9 - x^2 - y^2}$  与之对应. 因此, 它是一个多值函数, 有两个分支: 图形分别是上、下半个球面. 本书没有特别声明, 一般只研究单值多元函数.

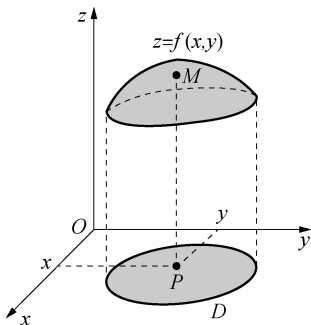


图 7-2-3

## 二、二元函数的极限与连续

与一元函数的极限概念类似, 可以定义二元函数的极限.

**定义 4** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0$  的某一邻域内有定义(点  $P_0$  可以排除在外),  $P(x, y)$  是该邻域内异于  $P_0$  的任何一点. 如果当点  $P$  以任何方式趋近于点  $P_0$  时, 函数  $f(x, y)$  的值无限接近于一个确定的常数  $A$ , 那么就说  $A$  是函数  $f(x, y)$  当  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  时的极限, 记作

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A \text{ 或 } \lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = A.$$

为了区别于一元函数的极限, 我们把二元函数的极限叫作**二重极限**. 必须注意的是, 二重极限存在, 是指  $P(x, y)$  以任何方式趋于  $P_0(x_0, y_0)$  时,  $f(x, y)$  都无限接近于  $A$ . 因此, 如果  $P(x, y)$  以某一特殊方式, 例如沿着一条定直线或定曲线趋于  $P_0(x_0,$



$y_0$ ) 时, 即使  $f(x, y)$  无限接近于某一确定值, 我们还不能断定函数的极限存在. 但是, 如果当  $P(x, y)$  沿不同的方式趋于  $P_0(x_0, y_0)$  时,  $f(x, y)$  趋于不同的值, 那么就可以断定这个函数的极限不存在. 下面举例加以说明.

例如函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

显然, 当点  $P$  沿  $x$  轴趋于  $(0, 0)$  时,

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y=0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

又当点  $P$  沿  $y$  轴趋于  $(0, 0)$  时,

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ x=0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

虽然点  $P$  以以上两种特殊方式趋于原点时函数的极限存在且相等, 但是  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  并不存在. 这是因为当点  $P$  沿着直线  $y = x$  趋于  $(0, 0)$  时, 有

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y=x}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

当然, 也可以换个方式来解释: 如果点  $P$  沿直线  $y = kx$  趋于  $(0, 0)$  时, 有

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y=kx}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y=kx}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

它随  $k$  的值的不同而改变, 从而  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  不存在.

关于二元函数的极限运算, 有与一元函数类似的运算法则. 利用二元函数的极限概念, 可以定义二元函数的连续性.

**定义 5** 如果当  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  时, 函数  $f(x, y)$  的极限存在, 且等于它在该点处的函数值  $f(x_0, y_0)$ , 即

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

则称函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处连续, 点  $(x_0, y_0)$  也称为函数  $f(x, y)$  的连续点. 否则, 点  $(x_0, y_0)$  称为函数  $f(x, y)$  的间断点.

如果函数  $f(x, y)$  在开区域(或闭区域)  $D$  内的每一点都连续, 那么就称函数  $f(x, y)$  在  $D$  内连续, 或者称  $f(x, y)$  是  $D$  内的连续函数.

与一元初等函数类似, 多元初等函数是指可用一个式子表示的多元函数, 这个式子是由常数及具有不同自变量的多元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而得到的. 例如  $\sin(x + y)$ ,  $xy - x + 3y$ ,  $\frac{x + x^2 - y^2}{2 + y^2}$  等都是二元初等函数.

一切二元初等函数在其定义域内是连续的. 根据多元函数的连续性, 如果要求函数在点  $P_0$  处的极限, 而该点又在此函数的定义域内, 那么极限值就是函数在该点的函数



值, 即

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

**例 1** 求  $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} (xy - 2x + y)$ .

**解** 因为函数  $f(x, y) = xy - 2x + y$  是二元初等函数, 其定义域为  $xOy$  平面, 从而知道  $f(x, y)$  在定义域内连续, 所以有

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} (xy - 2x + y) = 1 \times 2 - 2 \times 1 + 2 = 2.$$

**例 2** 求  $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{xy}{x + y}$ .

**解** 因为  $f(x, y) = \frac{xy}{x + y}$  是二元初等函数, 其定义域为  $D = \{(x, y) \mid x + y \neq 0\}$ , 点  $(1, 2)$  在定义域内, 所以  $f(x, y)$  在  $(1, 2)$  点处连续, 因此

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{xy}{x + y} = f(1, 2) = \frac{1 \times 2}{1 + 2} = \frac{2}{3}.$$

二元连续函数在有界闭区域上具有如下性质:

**性质 1 (最值定理)** 在有界闭区域  $D$  上连续的二元函数, 必有最大值和最小值.

**性质 2 (介值定理)** 在有界闭区域  $D$  上连续的二元函数, 必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

**性质 3 (零点定理)** 在有界闭区域  $D$  上连续的二元函数, 它可以取到两个不同的函数值, 其中一个大于零, 一个小于零, 则至少存在一点  $(\xi, \eta) \in D$ , 使得  $f(\xi, \eta) = 0$ .

## 习题 7-2

1. 求下列函数的定义域.

$$(1) z = \ln(y^2 - 3x + 1); \quad (2) z = \frac{1}{\sqrt{x + y}} + \frac{1}{\sqrt{x - y}};$$

$$(3) z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a > b > 0); \quad (4) z = \sqrt{y - \sqrt{x}}.$$

2. 求下列各极限.

$$(1) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{2 - xy}{x^2 + y^2}; \quad (2) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{3 - \sqrt{xy + 9}}{xy};$$

$$(3) \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (4) \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{\tan(xy)}{y}.$$

\* 3. 证明  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x + y}{x - y}$  不存在.



### 第三节 偏 导 数

#### 一、偏导数的定义

在实际生活和科学实验中,经常要研究二元函数相对于某一个自变量的变化率,如由大气压在某个方向的变化率预报某地的风向与风力,生产函数的边际函数,等等.在研究一元函数时,我们从研究函数的变化率引入导数的概念.对于二元函数,由于自变量个数的增多,因变量与自变量的关系要比一元函数复杂得多,那么怎样研究它的变化率呢?如果把二元函数  $z=f(x, y)$  中的一个自变量  $y$  固定(即看作常量),只有自变量  $x$  变化,这时它就是  $x$  的一元函数,这个函数对  $x$  的导数,就称为二元函数  $z=f(x, y)$  对  $x$  的偏导数.

**定义 1** 设函数  $z=f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内有定义,当  $y$  固定在  $y_0$ , 而  $x$  在  $x_0$  处有增量  $\Delta x$  时,相应的函数有增量

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (7-3-1)$$

存在,那么称此极限为函数  $z=f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处对  $x$  的偏导数,记作

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, z_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \text{ 或 } f_x(x_0, y_0).$$

类似地,如果

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (7-3-2)$$

存在,则称此极限为函数  $z=f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处对  $y$  的偏导数,记作

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, z_y \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \text{ 或 } f_y(x_0, y_0).$$

如果函数  $z=f(x, y)$  在平面区域  $D$  内每一点  $(x, y)$  处对  $x$  的偏导数都存在,那么这个偏导数就是  $x, y$  的函数,它称为函数  $z=f(x, y)$  对自变量  $x$  的偏导函数,记作

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z_x \text{ 或 } f_x(x, y).$$

类似地,可以定义函数  $z=f(x, y)$  对自变量  $y$  的偏导函数,记作

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, z_y \text{ 或 } f_y(x, y).$$

由偏导函数的定义可知,  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处对  $x$  的偏导数  $f_x(x_0, y_0)$  等于偏导函数  $f_x(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的函数值,即

$$f_x(x_0, y_0) = f_x(x, y) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

$f_y(x_0, y_0)$  等于偏导函数  $f_y(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的函数值.

就如一元函数的导数一样, 以后在不至于混淆的情况下也把偏导函数简称为偏导数.

**例 1** 求函数  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$  在点  $(1, 2)$  处的偏导数.

**解** 把  $y$  看作常量, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y;$$

把  $x$  看作常量, 得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y.$$

将  $(1, 2)$  代入上面的结果, 就得

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 2 \times 1 + 2 = 4, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 1 + 2 \times 2 = 5.$$

**例 2** 求  $z = x^2 \cos 2y$  的偏导数.

**解** 把  $y$  看作常量, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cos 2y;$$

把  $x$  看作常量, 得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x^2 \sin 2y.$$

**例 3** 设  $z = x^y (x > 0, x \neq 1)$ , 求证:

$$\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

**解** 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$ , 所以

$$\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} \cdot yx^{y-1} + \frac{1}{\ln x} \cdot x^y \ln x = x^y + x^y = 2z.$$

**例 4** 已知理想气体的状态方程为  $pV = RT$  ( $R$  为常数), 求  $\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p}$ .

**解** 由已知可得  $p = \frac{RT}{V}$ , 所以  $\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2}$ ;

由已知可得  $V = \frac{RT}{p}$ , 所以  $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{p}$ ;

由已知可得  $T = \frac{pV}{R}$ , 所以  $\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{R}$ ;

所以

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{V^2} \cdot \frac{R}{p} \cdot \frac{V}{R} = -1$$

对于一元函数,  $\frac{dy}{dx}$  可看作函数的微分  $dy$  与自变量的微分  $dx$  之商. 由例 4 可以看出,

偏导数的记号是一个整体记号, 不能看作分子与分母之商.

二元函数  $z=f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的偏导数具有下述几何意义.

设  $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  是曲面  $z=f(x, y)$  上的一点, 过点  $M_0$  作平面  $y=y_0$ , 截此曲面得一曲线, 此曲线在平面  $y=y_0$  上的方程为  $z=f(x, y_0)$ , 则导数  $f_x(x_0, y_0)$  就是这曲线在点  $M_0$  处的切线  $M_0T_x$  对  $x$  轴的斜率(图 7-3-1), 同理, 偏导数  $f_y(x_0, y_0)$  的几何意义是曲面被平面  $x=x_0$  所截得的曲线在  $M_0$  处的切线  $M_0T_y$  对  $y$  轴的斜率.

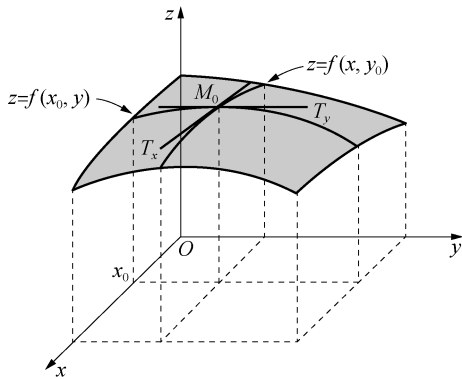


图 7-3-1

对于一元函数而言, 如果函数在某点处可导, 那么它在该点处必连续. 但对于二元函数却不一定, 即在某点  $(x_0, y_0)$  处, 两个偏导数都存在仍不能保证函数在该点处连续. 例如

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

在点  $(0, 0)$  处的偏导数分别为

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

它们都存在, 但由第二节已经知道它在点  $(0, 0)$  处不连续.

## 二、二阶偏导数

设函数  $z=f(x, y)$  在区域  $D$  内具有偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x, y)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x, y)$ , 一般来说, 在区域  $D$  内, 它们仍是  $x, y$  的函数, 比如例 2 中,  $\frac{\partial z}{\partial x}=2x \cos 2y$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}=-2x^2 \sin 2y$ , 这两个函数的偏导数也存在, 那么称它们的偏导数是函数  $z=f(x, y)$  的二阶偏导数.

二元函数依照对自变量求导的次序不同有下列四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y).$$

其中,  $f_{xy}(x, y)$  和  $f_{yx}(x, y)$  称为混合偏导数.

进而例 2 的四个二阶偏导数分别为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= 2\cos 2y, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -4x\sin 2y, \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= -4x\sin 2y, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -4x^2\cos 2y.\end{aligned}$$

**例 5** 设  $z = x^4 + y^4 - 4xy$ , 求其四个二阶偏导数.

**解**  $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 4x, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 12x^2, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -4,$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -4, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 12y^2.$$

上面的例题中, 二阶混合偏导数都是相等的, 那么, 是不是所有的二阶混合偏导数都相等呢?

**定理** 如果函数  $z = f(x, y)$  的两个二阶混合偏导数在区域  $D$  内连续, 那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

换句话说, 就是二阶混合偏导数在连续的情况下与求导的次序无关. 这个定理的证明从略.

### 习题 7-3

1. 求下列函数的偏导数.

(1)  $z = x^2y - y^2x$ ; (2)  $z = \arctan \frac{y}{x}$ ;

(3)  $z = \sin^2(xy) + \cos(xy)$ ; (4)  $z = (1 + xy)^y$ .

2. 设  $f(x, y) = x^2y^2 - 2x$ , 求  $f_x(2, 3)$ ,  $f_y(0, 0)$ .

3. 求下列函数的四个二阶偏导数.

(1)  $z = x^3 + y^3 - 2xy$ ; (2)  $z = y^x$ .

4. 验证函数  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

## 第四节 全 微 分

偏导数是函数在只有一个自变量变化时的瞬时变化率, 但在实际问题中, 常常要知道函数的全面变化情况, 即当自变量  $x, y$  分别有微小改变量  $\Delta x, \Delta y$  时, 相应的函数改变量  $\Delta z$  与它们有怎样的依赖关系. 全微分就是解决这类问题的有力工具.

## 一、全微分的定义

与一元函数的增量定义类似, 引入二元函数全增量的概念.

设函数  $z = f(x, y)$  在点  $P(x, y)$  的某个邻域内有定义, 并设  $P'(x + \Delta x, y + \Delta y)$  为该邻域内的任意一点, 则这两点的函数值之差  $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ , 称为函数在点  $P$  对应于自变量增量  $\Delta x$  和  $\Delta y$  的全增量, 记为  $\Delta z$ , 即

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

一般来说, 计算全增量  $\Delta z$  比较复杂. 与一元函数的情形类似, 我们希望用自变量的增量  $\Delta x$  和  $\Delta y$  的线性函数来近似代替函数的全增量.

### 引例 铁板热胀冷缩问题

设一块矩形铁板的边长分别为  $x, y$ , 其面积  $S = xy$  是一个二元函数, 当铁板受热膨胀时, 两条边长分别增长  $\Delta x, \Delta y$  (图 7-4-1), 则其面积产生的全增量

$$\Delta S = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

上式右边包含两部分, 一部分是  $y\Delta x + x\Delta y$ , 它是  $\Delta x, \Delta y$  的线性函数; 另一部分是  $\Delta x\Delta y$ , 当  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$  时, 即当  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$  时,  $\Delta x\Delta y$  是比  $\rho$  高阶的无穷小量. 因此, 如果略去  $\Delta x\Delta y$ , 用  $y\Delta x + x\Delta y$  近似表示  $\Delta S$ , 那么误差  $\Delta S - (y\Delta x + x\Delta y)$  是一个比  $\rho$  高阶的无穷小量. 线性函数  $y\Delta x + x\Delta y$  称为函数  $s = xy$  在点  $(x, y)$  的全微分.

下面我们给出二元函数的全微分定义.

**定义** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  的某邻域内有定义, 如果函数在点  $(x, y)$  的全增量

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中  $A$  和  $B$  不依赖于  $\Delta x$  和  $\Delta y$ , 而只和  $x, y$  有关,  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ , 那么称函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微分,  $A\Delta x + B\Delta y$  称为函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  的全微分, 记为  $dz$ , 即

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

如果函数在区域  $D$  内各点都可微分, 那么称这个函数在  $D$  内可微分.

在第三节中曾指出, 二元函数在某点的偏导数存在, 并不能保证函数在该点连续. 但是, 由上述定义可知, 如果函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微分, 那么这个函数在该点必连续.

事实上, 因为

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \Delta z = 0,$$

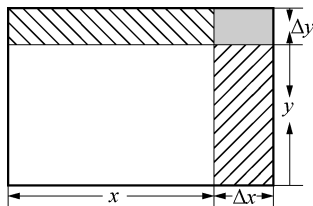


图 7-4-1

所以

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} [f(x, y) + \Delta z] = f(x, y).$$

因此, 函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处连续.

在一元函数中, 可微和可导是等价的, 那么对于二元函数, 可微与偏导数之间又有什么样的关系呢?

**定理 1** 若函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处可微, 则  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  都存在, 且

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

**证明** 因为函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处可微, 所以

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A \Delta x + B \Delta y + o(\rho),$$

令  $\Delta y = 0$ , 则有

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = A \Delta x + o(\rho) = A \Delta x + o(\Delta x).$$

再令  $\Delta x \rightarrow 0$ , 得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = A.$$

即偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$  存在, 且  $A = \frac{\partial z}{\partial x}$ .

同法可证  $\frac{\partial z}{\partial y}$  存在, 且  $B = \frac{\partial z}{\partial y}$ , 从而

$$dz = A \Delta x + B \Delta y = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

定理 1 表明, 两个偏导数存在只是二元函数可微的必要条件, 不是充分条件. 那么, 必须满足什么条件, 才能保证二元函数可微呢?

**定理 2** 如果函数  $z = f(x, y)$  的偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  在点  $(x, y)$  处连续, 那么函数在该点可微分.

(证明从略)

如果记  $dx = \Delta x$ ,  $dy = \Delta y$ , 那么函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处的全微分又可以表述为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

**例 1** 计算函数  $z = xy + y^2$  的全微分.

**解** 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = y$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y$ , 所以

$$dz = y dx + (x + 2y) dy.$$

**例 2** 计算在  $z = x^2 y^2$  点  $(2, -1)$  处的全微分.

解 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y$ ;  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=2 \\ y=-1}} = 4$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=2 \\ y=-1}} = -8$ , 所以

$$dz \Big|_{\substack{x=2 \\ y=-1}} = 4dx - 8dy.$$

**例 3** 计算  $z = e^{xy}$  在  $x=1$ ,  $y=1$ ,  $\Delta x=0.1$ ,  $\Delta y=0.15$  时的全微分.

解 因为  $dz = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$ , 所以

$$dz \Big|_{\substack{x=1, \Delta x=0.1 \\ y=1, \Delta y=0.15}} = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy = 0.25e.$$

## 二、全微分在近似计算中的应用

由二元函数全微分的定义以及定理 2 可知, 当二元函数的两个偏导数连续, 并且  $|\Delta x|$ ,  $|\Delta y|$  都较小时, 就有近似计算公式

$$\Delta z \approx dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y.$$

上式也可以写成

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y. \quad (7-4-1)$$

**例 4** 有一个圆柱体受压后发生变形, 它的半径由 20 cm 增大到 20.01 cm, 高度由 100 cm 减少到 99 cm(图 7-4-2), 求此圆柱体体积变化的近似值.

解 设圆柱体的半径、高和体积分别为  $r$ ,  $h$  和  $V$ , 则有

$$V = \pi r^2 h.$$

记  $r$ ,  $h$  和  $V$  的增量分别为  $\Delta r$ ,  $\Delta h$  和  $\Delta V$ , 根据公式(7-4-1), 有

$$\Delta V \approx dV = V_r \Delta r + V_h \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h.$$

把  $r=20$ ,  $h=100$ ,  $\Delta r=0.01$ ,  $\Delta h=-1$  代入上式, 得

$$\Delta V \approx 2\pi \times 20 \times 100 \times 0.01 + \pi \times 20^2 \times (-1) = -360\pi (\text{cm}^3).$$

即此圆柱体在受压后体积大约减少了  $360\pi \text{ cm}^3$ .

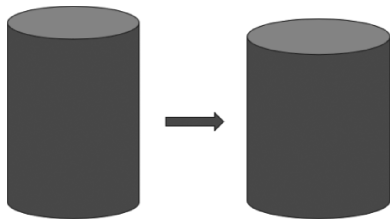


图 7-4-2

**例 5** 计算  $\sqrt{(1.01)^2 + (1.98)^3}$  的近似值.

解 设  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$ , 则  $f(1.01, 1.98) = \sqrt{(1.01)^2 + (1.98)^3}$  为所求的值.

因为

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}}, \quad f_y(x, y) = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3}}.$$

取  $x_0=1$ ,  $y_0=2$ ,  $\Delta x=0.01$ ,  $\Delta y=-0.02$ , 有

$$f_x(1, 2) = \frac{1}{3}, \quad f_y(1, 2) = 2, \quad f(1, 2) = 3.$$

所以



$$\begin{aligned}
 f(1.01, 1.98) &\approx f(1, 2) + f_x(1, 2) \cdot \Delta x + f_y(1, 2) \cdot \Delta y \\
 &= 3 + \frac{1}{3} \times 0.01 + 2 \times (-0.02) \approx 2.963.
 \end{aligned}$$

即  $\sqrt{(1.01)^2 + (1.98)^2} \approx 2.963$ .

### 习题 7-4

1. 计算下列函数的全微分.

$$(1) z = xy + \frac{y}{x};$$

$$(2) z = \sqrt{x^3 + y^3};$$

$$(3) z = \sin(x + y^2);$$

$$(4) z = \ln(x^2 + y^2).$$

2. 求函数  $z = \ln(x^2 + y^2)$  当  $x=2, y=1$  时的全微分.

3. 求函数  $z = \frac{x}{y}$  当  $x=2, y=1, \Delta x=0.2, \Delta y=-0.1$  时的全微分.

4. 计算  $(1.02)^{2.04}$  的近似值.

5. 一块矩形铁板的长为 8 m, 宽为 6 m, 如果受热后长边增加 5 cm, 短边增加 10 cm, 求这块铁板面积变化的近似值.

## 第五节 偏导数的应用

偏导数在自然科学、经济管理和工程技术等领域有着广泛的应用, 比如最优化问题、条件极值问题等, 它们都涉及多元函数的偏导数求解.

### 一、多元函数的极值及最大值与最小值

在实际问题中, 往往会遇到求多元函数的最大值与最小值问题. 与一元函数类似, 多元函数的最大值、最小值与极大值、极小值有着密切联系. 下面我们以二元函数为例, 讨论多元函数的极值问题.

**定义 1** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某个邻域内有定义, 对于该邻域内任何异于  $(x_0, y_0)$  的点, 如果恒有不等式

$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$

成立, 则称函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  有极大值  $f(x_0, y_0)$ ; 如果恒有不等式

$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$

成立, 则称函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  有极小值  $f(x_0, y_0)$ . 极大值和极小值统称为极值. 使得函数取得极值的点称为极值点.

**例 1** 函数  $z = 4x^2 + 3y^2$  在点  $(0, 0)$  处有极小值. 因为对于点  $(0, 0)$  的任何一个邻域内异于它的点, 函数值都大于 0, 而在点  $(0, 0)$  处的函数值为零. 从几何上看, 这是

显然的. 因为点  $(0, 0, 0)$  是开口向上的椭圆抛物面  $z = 4x^2 + 3y^2$  的顶点, 如图 7-5-1 所示.

**例 2** 函数  $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$  在点  $(0, 0)$  处有极大值. 因为在点  $(0, 0)$  处函数值为零, 而对于点  $(0, 0)$  的任何一个邻域内异于它的点, 函数值都小于 0. 点  $(0, 0, 0)$  是位于平面  $xOy$  下方的锥面  $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$  的顶点. 如图 7-5-2.

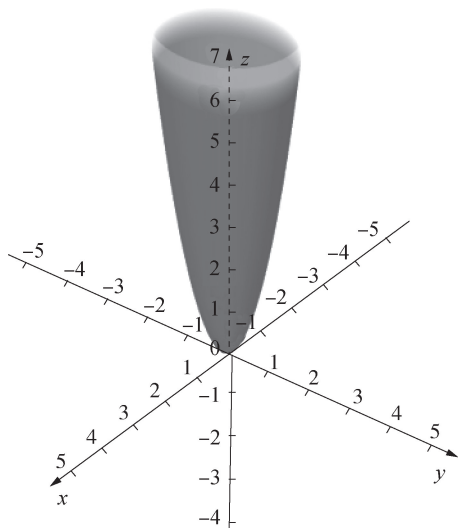


图 7-5-1

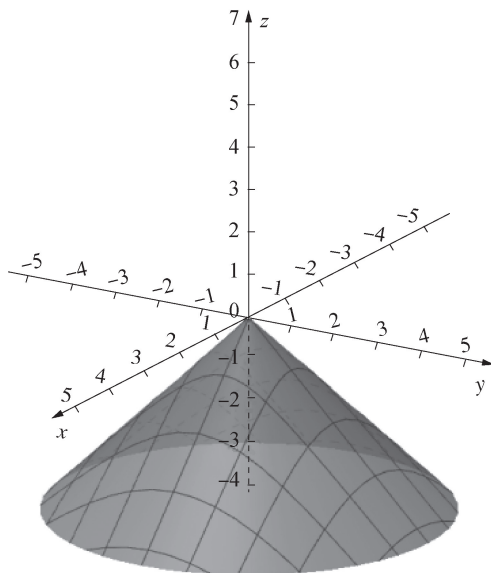


图 7-5-2

**例 3** 函数  $z = xy$  在  $(0, 0)$  处既取不到极大值也取不到极小值. 因为在点  $(0, 0)$  处的函数值为零, 而在点  $(0, 0)$  的任何一个邻域内, 总有使得函数值大于 0 的点, 也有使得函数值小于 0 的点. 如图 7-5-3.

二元函数的极值问题, 一般可以用偏导数来解决. 下面两个定理就是关于这个问题的结论.

**定理 1 (极值存在的必要条件)** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  具有偏导数, 且在点  $(x_0, y_0)$  处有极值, 则有

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0.$$

**证明** 不妨设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处取得极大值. 根据极大值的定义, 在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内异于它的点  $(x, y)$  都适合不等式

$$f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

特殊地, 在该邻域内取  $y = y_0$  而  $x \neq x_0$  的点, 也满足不等式

$$f(x, y_0) < f(x_0, y_0).$$

这表明一元函数  $f(x, y_0)$  在  $x = x_0$  处取得极大值, 因而必有

$$f_x(x_0, y_0) = 0.$$

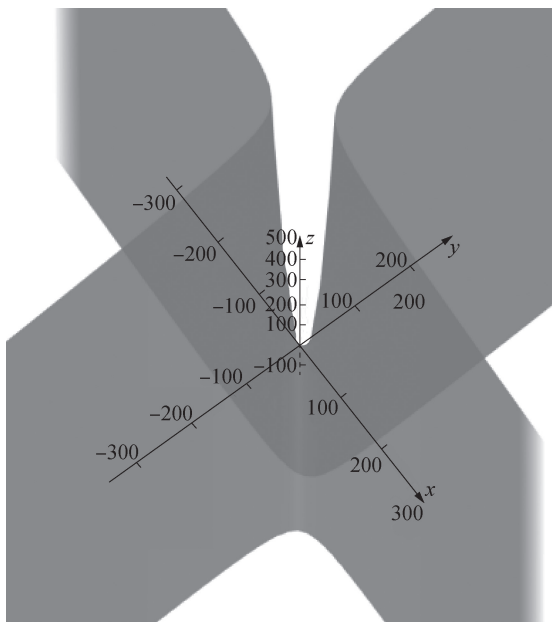


图 7-5-3

类似可证

$$f_y(x_0, y_0) = 0.$$

与一元函数类似, 能使  $f_x(x_0, y_0) = 0$ ,  $f_y(x_0, y_0) = 0$  同时成立的点  $(x_0, y_0)$  称为函数  $z = f(x, y)$  的驻点. 由定理 1 可知, 具有偏导数的函数的极值点必定是驻点. 但是函数的驻点不一定是极值点. 在例 3 中,  $(0, 0)$  是函数  $z = xy$  的驻点, 但不是极值点.

### 定理 2 (极值存在的充分条件)

设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内连续且具有一阶及二阶连续偏导数, 又  $f_x(x_0, y_0) = 0$ ,  $f_y(x_0, y_0) = 0$ , 令

$$f_{xx}(x_0, y_0) = A, f_{xy}(x_0, y_0) = B, f_{yy}(x_0, y_0) = C,$$

则  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处取得极值的条件如下:

- (1)  $AC - B^2 > 0$  时具有极值, 且当  $A < 0$  时有极大值, 当  $A > 0$  时有极小值;
- (2)  $AC - B^2 < 0$  时没有极值;
- (3)  $AC - B^2 = 0$  时可能有极值, 也可能没有极值, 还需要另作讨论.

定理的证明从略.

由极限存在的充分条件和必要条件, 可以得出求二元函数极值的步骤如下:

- (1) 求驻点, 通过求解方程组  $f_x(x, y) = 0$ ,  $f_y(x, y) = 0$ , 得到所有驻点.
- (2) 对于每一个驻点  $(x_0, y_0)$ , 求出二阶偏导数的值  $A$ ,  $B$  和  $C$ .
- (3) 根据  $AC - B^2$  的符号, 按照函数极限存在的充分条件, 判定  $f(x_0, y_0)$  是不是极值; 如果是, 是极大值还是极小值.



### 例 4

一个长方体容器, 相邻三条棱的长度之和为常数  $a$  ( $a > 0$ ), 求这个长方

体容器容积的极值.

**解** 设这个长方体容器的三条棱分别为  $x, y, (a-x-y)$ , 则其体积可以表示为

$$V = f(x, y) = xy(a - x - y).$$

有  $f_x(x, y) = y(a - 2x - y), f_y(x, y) = x(a - x - 2y)$

解方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} x=0 \\ y=a \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} x=a \\ y=0 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{a}{3} \\ y=\frac{a}{3} \end{cases},$$

得到所有驻点  $(0, 0), (0, a), (a, 0), (\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$ . 又

$$f_{xx}(x, y) = -2y, f_{xy}(x, y) = a - 2x - 2y, f_{yy}(x, y) = -2x.$$

(1) 在  $(0, 0)$  处, 因为  $A=0, B=a, C=0, AC-B^2 < 0$ , 所以  $(0, 0)$  不是极值点;

(2) 在  $(0, a)$  处, 因为  $A=-2a, B=-a, C=0, AC-B^2 = -a^2 < 0$ , 所以  $(0, a)$  不是极值点;

(3) 在  $(a, 0)$  处, 因为  $A=0, B=-a, C=-2a, AC-B^2 = -a^2 < 0$ , 所以  $(a, 0)$  不是极值点;

(4) 在  $(\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$  处, 因为  $A = -\frac{2}{3}a, B = -\frac{1}{3}a, C = -\frac{2}{3}a, AC-B^2 = \frac{1}{3}a^2 > 0$ , 所以  $(\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$  是极值点, 且  $f(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}) = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot (a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3}) = \frac{a^3}{27}$ . 又  $A < 0$ , 所以函数在点  $(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3})$  处取得极大值  $\frac{a^3}{27}$ .

由于是实际问题, 和一元函数类似, 如果在区域  $D$  内只有一个驻点, 那么在该驻点处的函数极值就是函数在区域  $D$  内的最值. 所以本例中, 求得容积的极大值也是最大值.

**例 5** 有一宽为 24cm 的长方

形铁板, 把它两边折起来做成一个断面为等腰梯形的水槽. 问怎样折法才能使断面的面积最大?

**解** 设折起来的边长为  $x$ cm, 倾角为  $\alpha$  (如图 7-5-4), 则梯形断面的下

底长为  $(24-2x)$ cm, 上底长为  $(24-2x+2x\cos\alpha)$ cm, 高为  $x\sin\alpha$ cm, 断面的面积

$$A = \frac{1}{2}[(24-2x) + (24-2x+2x\cos\alpha)] \cdot x\sin\alpha,$$

即

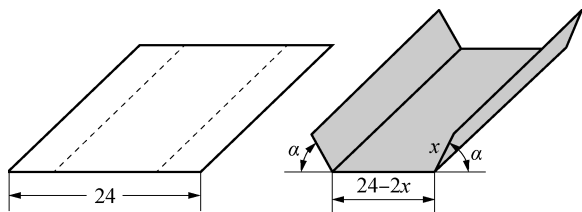


图 7-5-4

$$A = 24x \sin \alpha - 2x^2 \sin \alpha + x^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \left(0 < x < 12, 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

所以断面面积  $A$  是  $x$  和  $\alpha$  的二元函数, 要求这个函数的最大值, 令

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial x} = 24 \sin \alpha - 4x \sin \alpha + 2x \sin \alpha \cos \alpha = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \alpha} = 24x \cos \alpha - 2x^2 \cos \alpha + x^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0 \end{cases},$$

因为  $\sin \alpha \neq 0$  及  $x \neq 0$ , 方程组可化为

$$\begin{cases} 12 - 2x + x \cos \alpha = 0 \\ 24 \cos \alpha - 2x \cos \alpha + x (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0 \end{cases},$$

解这个方程组, 得  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ,  $x = 8$ .

由于是实际问题, 水槽断面的面积  $A$  最大值一定存在, 并且在区域内  $D = \{(x, \alpha) \mid 0 < x < 12, 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\}$  取得. 通过计算得知  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  时的函数值比  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ,  $x = 8$  时的函数值小, 又函数在  $D$  内只有一个驻点. 综上所述, 当  $x = 8$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  时, 能使水槽断面的面积最大.

## 二、条件极值 拉格朗日乘数法

在极值问题的讨论中, 对函数的自变量除了限制在函数的定义域内, 没有其他条件限制的问题称为无条件极值, 对函数的自变量再附加其他条件限制的极值问题称为条件极值.

例 5 中, 如果设长方体相邻三条棱长分别为  $x$ ,  $y$  和  $z$ , 则问题就是在附加条件

$$x + y + z = a \quad (a > 0, x > 0, y > 0, z > 0)$$

下, 求函数  $V = xyz$  的最大值问题. 由例 4 的解答过程, 可以发现, 有条件极值问题有时可以转化为无条件极值问题.

**拉格朗日乘数法** 要找函数  $z = f(x, y)$  在附加条件下  $\varphi(x, y) = 0$  的可能极值点, 可以先作拉格朗日函数

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

其中  $\lambda$  为参数. 求其对  $x$  与  $y$  的一阶偏导数, 并联立方程

$$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

由方程组解出  $x$ ,  $y$  及  $\lambda$ , 这样得到的就是函数  $f(x, y)$  在附加条件  $\varphi(x, y) = 0$  下的可能极值点.

**例 6** 某工厂生产两种型号的精密器械, 其月生产量分别为  $x$  和  $y$  台, 总成本函数为

$$C(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy \text{ (单位: 万元)}.$$

根据市场调查预测, 某月共需要这种器械 8 台, 问应该如何安排生产, 才能使总成本最小?

**解** 本例就是求在附加约束条件  $x + y = 8$  下的最值问题. 构造拉格朗日函数

$$L(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + \lambda(x + y - 8).$$

联立方程组

$$\begin{cases} L_x(x, y) = 2x - y + \lambda = 0 \\ L_y(x, y) = 4y - x + \lambda = 0, \\ x + y = 8 \end{cases}$$

消去参数  $\lambda$  解得

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}.$$

即生产两种型号的精密仪器的生产量分别为 5 台和 3 台才能使总成本最小.

### 习题 7-5

1. 某厂要用铁板做成一个体积为  $2\text{m}^3$  的有盖长方体水箱. 问当长、宽和高各取怎样的尺寸时, 才能使用料最省?

2. 某公司每周生产  $x$  件 A 产品和  $y$  件 B 产品, 其成本为

$$C(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy + 1\,000.$$

每件产品售价分别为 300 元和 200 元. 假设两种产品均很畅销, 试求使公司获得最大利润的这两种产品的生产数量及相应的最大利润.

3. 在平面中, 求抛物线  $y = x^2$  到直线  $x - y - 1 = 0$  的最短距离.

4. 将周长为  $l$  的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体, 问矩形的边长各为多少时, 才能使圆柱体的体积最大?

\* 5. 求表面积为  $a^2$  而体积最大的长方体的体积.

## 第六节 二重积分

在一元函数积分学中, 我们知道, 定积分是某种特殊形式的和的极限, 定积分的被积函数是一元函数, 积分范围是区间. 如果把定积分的概念推广到定义在平面区域上的二元函数的情形, 便得到二重积分的概念.

### 一、二重积分的概念

#### 例 1 曲顶柱体的体积

设有一立体, 它的底面是  $xOy$  面上的有界闭区域  $D$ , 它的侧面是以  $D$  的边界曲线为准线而母线平行于  $z$  轴的柱面, 它的顶是曲面  $z = f(x, y)$ , 这里  $f(x, y) \geq 0$  且在  $D$  上

连续, 这种立体叫曲顶柱体, 如图 7-6-1.

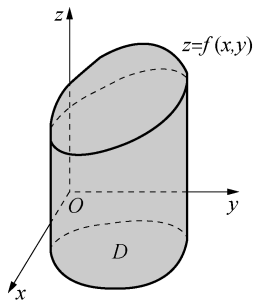


图 7-6-1

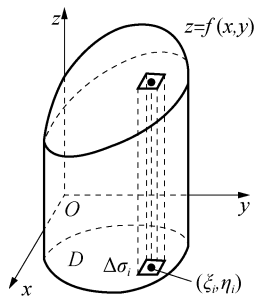


图 7-6-2

下面讨论如何计算该曲顶柱体的体积.

当曲面  $z = f(x, y) = \text{常量}$ , 即柱体的高不变时, 此柱体为一平顶柱体, 体积可以用公式

$$V = \text{底面积} \times \text{高}$$

来计算; 当高度  $f(x, y)$  是一个变量时, 此柱体的体积不能直接用上式来计算.

下面仿照求曲边梯形面积的方法来求曲顶柱体的体积.

第一步: 分割. 用一组曲线网格把区域  $D$  任意分割成  $n$  个小区域:  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ , 分别以这些小区的边界曲线为准线, 作母线平行于  $z$  轴的柱面, 这些柱面把原来的曲顶柱体分成  $n$  个小曲顶柱体.

第二步: 近似. 当每个小区的直径 (有界闭区域内任意两点间距离的最大值) 很小时, 对应的小曲顶柱体可以近似看成平顶柱体. 如图 7-6-2, 此时可以任取点  $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$ , 将  $f(\xi_i, \eta_i)$  视为第  $i$  个小曲顶柱体的高, 以  $\Delta\sigma_i$  为其底面积, 从而得到第  $i$  个小曲顶柱体的体积的近似值, 即

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

第三步: 求和. 将所得的  $n$  个小曲顶柱体的体积近似值相加, 得到  $V$  的近似值, 即

$$V \approx \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i.$$

第四步: 取极限. 以  $\lambda$  表示  $n$  个小区域直径的最大值, 易知当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 上述近似值就趋向于该曲顶柱体的体积  $V$ , 即

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i.$$



### 例 2

#### 平面薄片的质量

设有一质量非均匀分布的平面薄片, 占有  $xOy$  面上的闭区域  $D$ . 它在点  $(x, y)$  处的面密度为  $\rho(x, y)$ ,  $\rho(x, y) \geq 0$  且在  $D$  上连续, 现计算该平面薄片的质量  $M$ .

类似于上述求曲顶柱体体积的方法, 采用如下四个步骤:

第一步: 分割. 用一组曲线网格把区域  $D$  任意分割成  $n$  个小区域:  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots$ ,

$\Delta\sigma_n$ ,  $\Delta\sigma_i$  表示第  $i$  个小区域的面积.

第二步: 近似. 由于  $\rho(x, y)$  连续, 当每个小区域  $\Delta\sigma_i$  的直径很小时, 对应于每个小区域的小薄片的质量  $\Delta M_i$  的近似值为  $\rho(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i$ , 其中  $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$  为任意一点, 即

$$\Delta M_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

第三步: 求和. 将所得的  $n$  个小薄片质量的近似值相加, 便得到整个薄片质量的近似值, 即

$$M = \sum_{i=1}^n \Delta M_i \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i.$$

第四步: 取极限. 以  $\lambda$  表示  $n$  个小区域直径的最大值, 易知当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 上述近似值就趋向于平面薄片的质量  $M$ , 即

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i.$$

由此可以看出, 虽然上述两个问题的实际意义完全不同, 但都可以归结为同一种形式的极限问题, 这种数学模型在物理、几何和工程技术等领域经常会遇到. 若撇开这类极限问题的实际背景, 则可以抽取出二重积分的概念.

**定义** 设  $z=f(x, y)$  是定义在有界闭区域  $D$  上的有界函数, 将区域  $D$  任意分割成  $n$  个小区域:  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ , 且以  $\Delta\sigma_i$  表示第  $i$  个小区域的面积, 在每个小区域上任取一点  $(\xi_i, \eta_i)$ , 作乘积  $\rho(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 并作和式  $\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i$ , 如果当各小区域的直径的最大值  $\lambda \rightarrow 0$  时, 这 and 的极限总存在, 且与闭区域  $D$  的分法及点  $(\xi_i, \eta_i)$  的取法无关, 那么就称此极限为函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上的二重积分. 记作  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i.$$

其中,  $f(x, y)$  叫作被积函数,  $f(x, y)d\sigma$  叫作被积表达式,  $d\sigma$  叫作面积元素,  $x$  与  $y$  叫作积分变量,  $D$  叫作积分区域.

可以证明, 当  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续时, 上述和式的极限必存在. 后面的讨论中总假定函数在闭区域上的二重积分存在.

由于在二重积分的定义中, 对闭区域  $D$  的划分是任意的, 如果在直角坐标系中用一组平行于坐标轴的直线网格来划分区域  $D$ , 那么除了靠近边界的一些小区域之外, 绝大多数的小区域是矩形, 而小矩形的面积  $\Delta\sigma = \Delta x \cdot \Delta y$ , 如图 7-6-4 所示. 因此, 在直角坐标系中, 面积微元  $d\sigma = dx dy$ , 从而把二重积分可以记作

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

由二重积分的定义可知, 前面描述的曲顶柱体的体积为  $V = \iint_D f(x, y) dx dy$ , 而平面

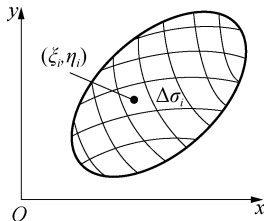


图 7-6-3



薄片的质量为  $M = \iint_D \rho(x, y) dx dy$ .

显然, 当  $f(x, y) \geq 0$  时, 二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  的几何意义表为: 以积分区域  $D$  为底, 以被积函数  $z = f(x, y)$  为顶的曲顶柱体的体积; 当  $f(x, y) < 0$  时,  $\iint_D f(x, y) dx dy$  的绝对值仍等于柱体的体积. 如果  $f(x, y)$  有正有负, 那么二重积分等于  $xOy$  面上方的柱体体积减去  $xOy$  面下方的柱体体积.

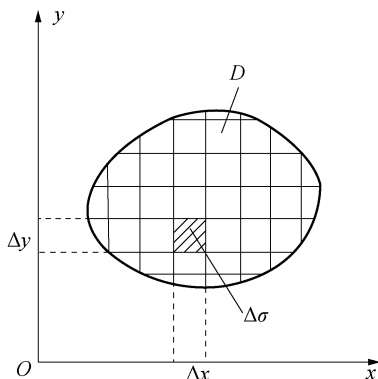


图 7-6-4

## 二、二重积分的性质

二重积分有与定积分相类似的性质.

**性质 1** 被积函数的常数因子可以提到积分号的外面, 即

$$\iint_D k f(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma \quad (k \text{ 为常数}).$$

**性质 2** 函数代数差的积分等于各个函数积分的代数差, 即

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

**性质 3 (区域可加性)** 若积分区域可以分成两个闭区域  $D_1$  和  $D_2$ , 则有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

**性质 4 (积分不等式)** 若在闭区域上  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

**性质 5 (估值定理)** 设  $M$  和  $m$  分别是函数  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上的最大值与最小值,  $\sigma$  为区域  $D$  的面积, 则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma.$$

**性质 6 (中值定理)** 设函数  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续,  $\sigma$  为区域  $D$  的面积, 则在  $D$  上至少存在一点  $(\xi, \eta)$ , 使得下式成立:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)\sigma.$$

当  $f(x, y) \geq 0$  时, 上述中值定理的几何意义是: 二重积分所确定的曲顶柱体的体积等于以积分区域  $D$  为底, 以  $f(\xi, \eta)$  为高的平顶柱体的体积.

**例 3** 比较  $I_1 = \iint_D \ln(x+y) d\sigma$ ,  $I_2 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma$ ,  $I_3 = \iint_D (x+y) d\sigma$  的大小, 其

中,  $D$  是由直线  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x+y=\frac{1}{2}$  和  $x+y=1$  所围成的区域.

**解** 根据题意, 积分区域夹在两条直线  $x+y=\frac{1}{2}$  和  $x+y=1$  之间, 所以对任意的点  $(x, y) \in D$ , 都有  $\frac{1}{2} \leq x+y \leq 1$ , 所以有  $x+y \geq (x+y)^2 > 0$ , 而  $\ln(x+y) < 0$ , 从而根据性质 4, 得到  $I_1 \leq I_2 \leq I_3$ .

**例 4** 使用二重积分表示平面  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  所围成的曲顶柱体的体积, 并用不等式组表示曲顶柱体在坐标平面  $xOy$  上的底.

**解** 四个平面围成的曲顶柱体就是三棱锥  $C-OAB$ , 它的底  $D$  是  $\triangle OAB$ , 顶的方程是  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ , 如图 7-6-5 所示, 此曲顶柱体的体积为

$$\iint_D \left(4 - 2x - \frac{4}{3}y\right) dx dy.$$

$$\text{其中 } D \text{ 可以表示为 } \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x \end{cases}.$$

事实上, 由立体几何知识知道, 该三棱锥的体积为

$$\iint_D \left(4 - 2x - \frac{4}{3}y\right) dx dy = 4.$$

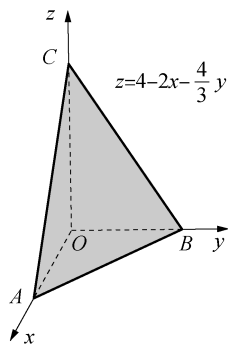


图 7-6-5

### 三、二重积分的计算

对于一般的函数和区域来说, 用定义计算积分不是一种切实可行的方法, 通常根据二重积分的几何意义把二重积分转化为两次定积分来计算.

#### 1. 直角坐标系下二重积分的计算

设积分区域  $D$  可以用不等式组

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \end{cases}$$

来表示(图 7-6-6), 这种区域称为  $X$  型区域, 其中函数  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且直线  $x=x_0$  ( $a \leq x_0 \leq b$ ) 与区域  $D$  的边界最多交于两点.

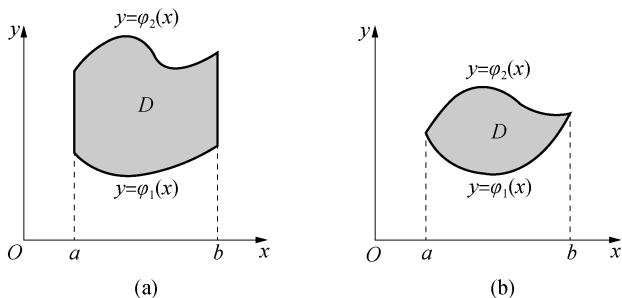


图 7-6-6

按照二重积分的几何意义, 二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  的值等于以  $D$  为底, 以曲面  $z=f(x, y)$  为顶的曲顶柱体的体积.

如图 7-6-7 所示, 在区间  $[a, b]$  上任意取一点  $x_0$ , 作平行于  $yOz$  面的平面. 这平面截曲顶柱体所得的截面是一个以区间  $[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$  为底、曲线  $z=f(x_0, y)$  为曲边的曲边梯形, 所以这截面的面积为

$$A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy.$$

一般地, 过区间  $[a, b]$  上任一点  $x$  且平行于  $yOz$  面的平面截曲顶柱体所得截面的面积为

$$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

由微元法可知曲顶柱体体积为

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

这个体积就是所求二重积分的值, 从而有等式

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad (7-6-1)$$

上式右端的积分称为先对  $y$  后对  $x$  的二次积分或累次积分, 也记作

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (7-6-2)$$

这就是说, 二重积分可化为两次定积分来计算, 第一次积分时, 把  $x$  看作常数, 把  $f(x, y)$  只看作是  $y$  的函数, 并对  $y$  计算从  $\varphi_1(x)$  到  $\varphi_2(x)$  的定积分, 计算的结果通常是  $x$  的函数. 第二次积分时, 把第一次积分的结果再对  $x$  计算在区间  $[a, b]$  上的定积分.

在上述的讨论中, 我们假定  $f(x, y) \geq 0$ , 但实际上, 公式(7-6-1)的使用不受此条件约束.

类似地, 如果积分区域  $D$  可以用不等式组

$$\begin{cases} \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases},$$

来表示(图 7-6-8), 这种区域称为  $Y$  型区域, 其中函数  $\psi_1(y)$ ,  $\psi_2(y)$  在区间  $[c, d]$  上连续, 且直线  $y=y_0 (c \leq y_0 \leq d)$  与区域  $D$  的边界最多交于两点. 则有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy. \quad (7-6-3)$$

上式右端的积分称为先对  $x$  后对  $y$  的二次积分或累次积分, 也记作

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (7-6-4)$$

如果积分区域既不是  $X$  型区域也不是  $Y$  型区域, 那么总可以把  $D$  分成几部分, 使得每

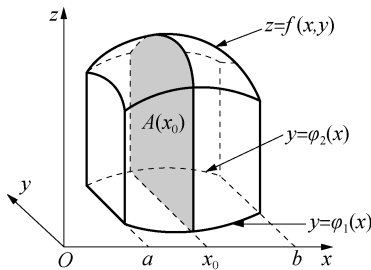


图 7-6-7

个部分为 X 型区域或 Y 型区域(如图 7-6-9, 把  $D$  分成  $D_1, D_2, D_3$  三部分), 然后利用二重积分对积分区域的可加性, 计算每个小区域上的二重积分, 再把所得的结果相加, 即为该函数在区域  $D$  上的二重积分.

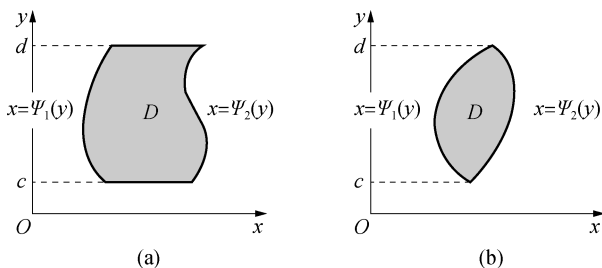


图 7-6-8

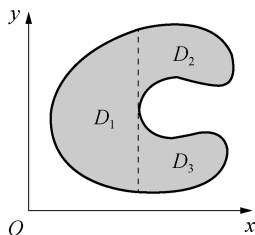


图 7-6-9

如果积分区域  $D$  既可以用不等式组  $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \end{cases}$  表示, 也可用不等式组  $\begin{cases} \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}$  表示, 则由公式 7-6-2 和公式 7-6-4 可得

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \quad (7-6-5)$$

上式表明, 这两个不同次序的二次积分相等. 也就是说, 当被积函数  $f(x, y)$  在积分区域  $D$  上连续时, 我们可以交换它在  $D$  上的两个二次积分的次序. 注意在交换次序的同时, 积分上下限也要随之改变. 因此, 在具体计算一个二重积分时, 可以有选择地将其化为其中一种次序的二次积分.

把二重积分化为二次积分计算时, 关键是确定累次积分的次序和两次定积分的积分限. 积分限通常根据积分区域  $D$  来确定. 先画出区域  $D$  的图形, 如果积分区域  $D$  如图 7-6-10 所示, 在区间  $[a, b]$  上任意取定一个  $x$  值作平行于  $y$  轴的直线, 去穿越区域  $D$ , 穿入点的纵坐标  $\varphi_1(x)$  与穿出点的纵坐标  $\varphi_2(x)$  分别是对  $y$  积分的下限与上限; 而  $a$  与  $b$  分别是对  $x$  积分的下限与上限. 这时积分区域  $D$  表示为  $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \end{cases}$ , 这样将二重积分化为先对  $y$  后对  $x$  的二次积分.

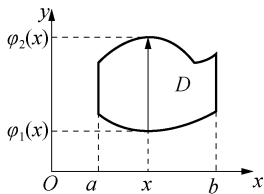


图 7-6-10

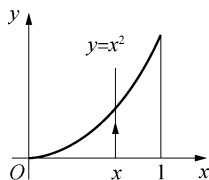


图 7-6-11

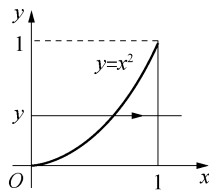


图 7-6-12


**例 5**

计算  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , 其中  $D$  是由  $x=1, y=0$  及  $y=x^2$  围成的闭区域.

画出积分区域  $D$  的图形, 发现  $D$  既是  $X$  型区域也是  $Y$  型区域.

**解法 1** 如图 7-6-11 所示, 区域  $D$  可表示为  $\begin{cases} 0 \leq y \leq x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ , 它是  $X$  型区域.

于是, 可将二重积分转化为先对  $y$  后对  $x$  的二次积分.

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy = \int_0^1 \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left( x^4 + \frac{1}{3} x^6 \right) dx = \left[ \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{21} x^7 \right]_0^1 = \frac{26}{105}. \end{aligned}$$

**解法 2** 如图 7-6-12, 区域  $D$  可表示为  $\begin{cases} \sqrt{y} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$ , 它是  $Y$  型区域.

于是, 可将二重积分转化为先对  $x$  后对  $y$  的二次积分.

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 (x^2 + y^2) dx = \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{\sqrt{y}}^1 dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{3} + y^2 - \frac{1}{3} y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{5}{2}} \right) dy = \frac{26}{105}. \end{aligned}$$

本题中, 用两种次序的二次积分难易度相当.

**例 6** 计算  $\iint_D y \sqrt{1+x^2-y^2} d\sigma$ , 其中  $D$  是由  $x=-1$ ,  $y=1$  及  $y=x$  围成的闭区域.

**解** 画出积分区域  $D$  的图形, 发现  $D$  既是  $X$  型区域也是  $Y$  型区域. 如果把它看成  $X$  型区域, 如图 7-6-13, 用公式(7-6-1) 则有

$$\begin{aligned} \iint_D y \sqrt{1+x^2-y^2} d\sigma &= \int_{-1}^1 dx \int_x^1 y \sqrt{1+x^2-y^2} dy \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-1}^1 \left[ (1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_x^1 dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-1}^1 (|x|^3 - 1) dx = -\frac{2}{3} \int_0^1 (x^3 - 1) dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

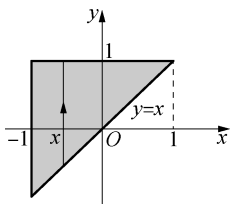


图 7-6-13

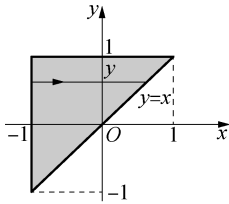


图 7-6-14

如果把它看成  $Y$  型区域, 如图 7-6-14, 用公式(7-6-3) 则有

$$\iint_D y \sqrt{1+x^2-y^2} d\sigma = \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^y y \sqrt{1+x^2-y^2} dx,$$

其中关于  $x$  的积分比较麻烦. 由此可见, 这里采用先对  $y$  后对  $x$  的二次积分比较方便.


**例 7**

计算  $\iint_D xy d\sigma$ , 其中  $D$  是由抛物线  $y^2 = x$  及直线  $y = x - 2$  围成的闭区域.

**解** 画出积分区域  $D$  的图形, 如图 7-6-15 所示, 区域  $D$  可表示为  $\begin{cases} -1 \leq y \leq 2 \\ y^2 \leq x \leq y+2 \end{cases}$ , 它是 Y 型区域, 所以

$$\begin{aligned} \iint_D xy d\sigma &= \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} xy dx = \int_{-1}^2 \left[ \frac{x^2}{2} y \right]_{y^2}^{y+2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 [y(y+2)^2 - y^5] dy = \frac{1}{2} \left[ \frac{y^4}{4} + \frac{4}{3} y^3 + 2y^2 - \frac{y^6}{6} \right]_{-1}^2 = \frac{45}{8}. \end{aligned}$$

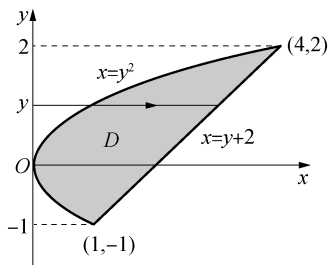


图 7-6-15

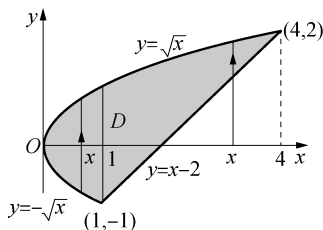


图 7-6-16

**思考:** 如果把积分区域  $D$  看成 X 型区域, 又该如何计算?


**例 8**

有两个圆柱面, 它们的方程分别为  $x^2 + y^2 = R^2$  和  $x^2 + z^2 = R^2$ , 求它们围成的立体的体积.

**解** 根据对称性, 只要算出它在第一卦限部分(图 7-6-17)的体积  $V_1$ , 然后乘以 8 就可得结果.

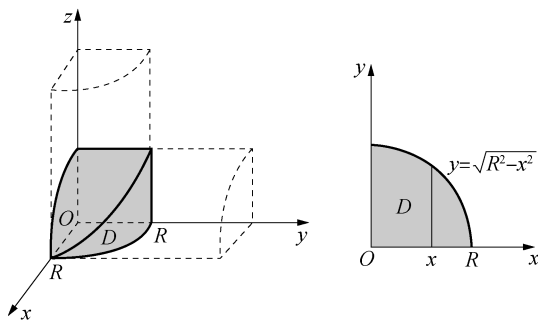


图 7-6-17

第一卦限部分可以看成是一个曲顶柱体, 它的顶是柱面  $z = \sqrt{R^2 - x^2}$ , 底为

$$D = \begin{cases} 0 \leq x \leq R \\ 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \end{cases},$$

于是

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2} dy = \int_0^R [\sqrt{R^2-x^2} y]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx \\
 &= \int_0^R (R^2-x^2) dx = \frac{2}{3} R^3.
 \end{aligned}$$

从而所求立体的体积为

$$V = 8V_1 = \frac{16}{3} R^3.$$

## 2. 极坐标系下二重积分的计算

在有些情形下, 如当积分区域  $D$  的边界是圆、圆环或它们的一部分, 且被积函数用极坐标变量  $\rho, \theta$  表达比较简单时, 就要考虑用极坐标来计算二重积分.

### 2.1 极坐标系简介

在平面内任取一点  $O$ , 作为极点, 向右水平方向引一条射线  $Ox$ , 叫作极轴. 在平面内任取一点  $M$ , 连接  $OM$ , 称为极径, 记作  $\rho = |OM|$ . 从  $Ox$  到  $OM$  所形成的角, 称作极角, 记作  $\theta$ . 点  $M$  的坐标用有序数组  $(\rho, \theta)$  来表示. 如图 7-6-18 所示.

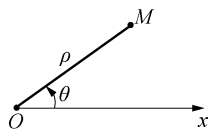


图 7-6-18

直角坐标系与极坐标系的关系:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, \quad x^2 + y^2 = \rho^2$$

### 2.2 利用极坐标系计算二重积分

用极坐标系下的曲线网, 如图 7-6-19

$$\rho = \text{常数}, \theta = \text{常数}$$

将区域  $D$  分为  $n$  个小区域. 除靠近边界曲线包含边界点的部分外, 其余部分的小区域面积可看作是两个小的扇形面积之差, 即

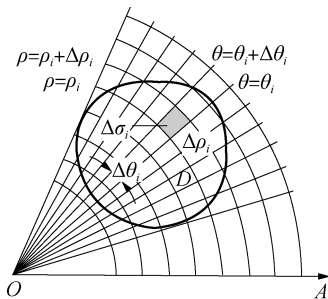


图 7-6-19

$$\Delta \sigma_i = \frac{1}{2} (\rho_i + \Delta \rho_i)^2 \Delta \theta_i - \frac{1}{2} \rho_i^2 \Delta \theta_i = \rho_i \Delta \rho_i \Delta \theta_i + \frac{1}{2} (\Delta \rho_i)^2 \Delta \theta_i,$$

当  $\Delta \rho_i$  与  $\Delta \theta_i$  充分小时,  $\Delta \sigma_i \approx \rho_i \Delta \rho_i \Delta \theta_i$ , 故极坐标系下的面积元素为  $d\sigma = \rho d\rho d\theta$ , 从而有极坐标系下的二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta.$$

极坐标系下的二重积分同样可以化为二次积分来计算. 一般, 极坐标系下的二次积分的次序是先对  $\rho$ , 后对  $\theta$ . 设当过极点的射线穿过  $D$  的内部时, 与边界曲线的交点不多于两个, 于是, 可将极点与积分区域之间的关系分为三类:

(1) 极点  $O$  在区域  $D$  之外

如图 7-6-20, 设积分区域  $D$  可以表示为

$$D = \{(\rho, \theta) \mid \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\},$$

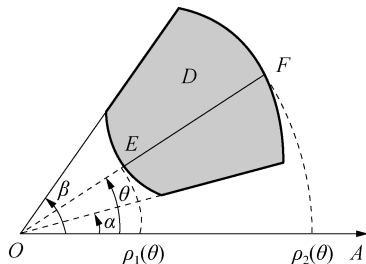


图 7-6-20

其中  $\rho_1(\theta), \rho_2(\theta)$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上连续, 则

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

(2) 极点  $O$  在区域  $D$  的边界上

设区域  $D$  是如图 7-6-21 所示的曲边扇形, 则  $D$  可以表示为

$$D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \rho(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\},$$

所以

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

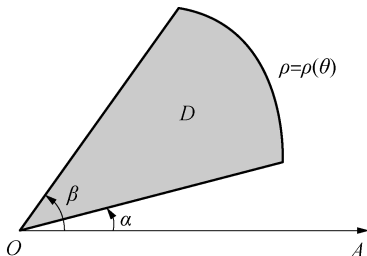


图 7-6-21

(3) 极点  $O$  在区域  $D$  内

设区域  $D$  的边界曲线为  $\rho = \rho(\theta)$ , 如图 7-6-22 所示, 则区域  $D$  可以表示为

$$D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \rho(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

所以

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

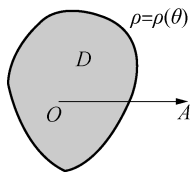


图 7-6-22

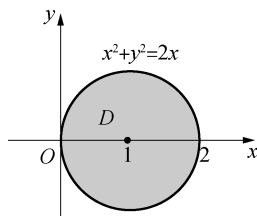


图 7-6-23

**例 9** 计算  $\iint_D (x+y) d\sigma$ , 其中区域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$ .

**解** 积分区域  $D$  如图 7-6-23 所示, 设  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ , 则在极坐标系下, 积分区域  $D$  可以表示为

$$D = \left\{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2\cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y) d\sigma &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \\ &= \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + \sin \theta) \cos^3 \theta d\theta = \pi. \end{aligned}$$

**例 10** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$  被圆柱面  $x^2 + y^2 = 2ax (a > 0)$  所截得的立体 (含在圆柱面内的部分) 的体积 (图 7-6-24).



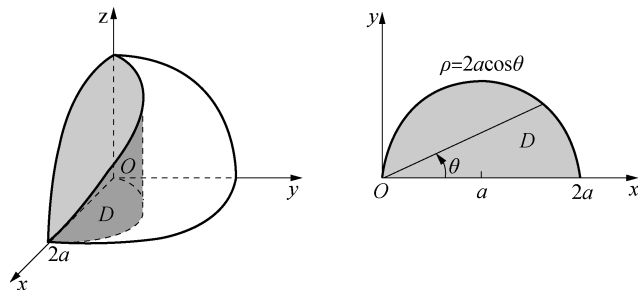


图 7-6-24

解 由对称性,

$$V = 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy,$$

其中  $D$  为半圆周  $y = \sqrt{2ax - x^2}$  及  $x$  轴所围成的闭区域. 在极坐标系中, 闭区域  $D$  可用不等式

$$0 \leq \rho \leq 2a \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

来表示. 于是

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - \rho^2} \, \rho \, d\rho \, d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \, \rho \, d\rho \\ &= \frac{32}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) \, d\theta = \frac{32}{3} a^3 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

### 习题 7-6

1. 用二重积分表示以曲面  $z = x + y + 1$  为顶, 以矩形区域  $D: 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 3$  为底的曲顶柱体的体积.

2. 利用二重积分的性质, 比较积分  $\iint_D \ln(x+y) \, d\sigma$  与  $\iint_D [\ln(x+y)]^2 \, d\sigma$  的大小, 其中  $D$  是由直线  $x=0, y=0, x+y=\frac{1}{2}$  和  $x+y=1$  所围成的区域.

3. 利用二重积分的性质, 估计积分  $\iint_D (\sin^2 x \sin y + 2) \, d\sigma$  的值, 其中  $D$  是矩形区域,  $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ .

4. 将二重积分  $\iint_D f(x, y) \, d\sigma$  化成两种不同次序的二次积分, 其中积分区域  $D$  是由  $x=-1, x=2, y=1$  和  $y=4$  所围成的闭区域.

5. 将二重积分  $\iint_D f(x, y) \, d\sigma$  化成两种不同次序的二次积分, 其中积分区域  $D$  是由  $y =$

$\frac{x}{2}$ ,  $y = 3 - x$  和  $y$  轴所围成的闭区域.

6. 改变二次积分  $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$  的次序.

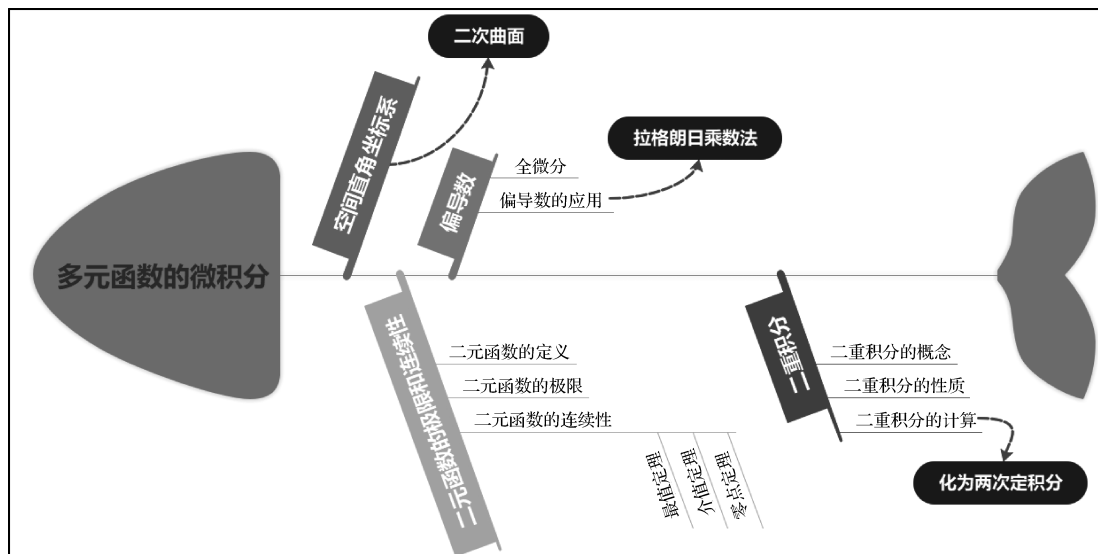
7. 计算二重积分  $\iint_D xy d\sigma$ , 其中  $D$  是由抛物线  $y = \sqrt{x}$  及  $x = 1$ ,  $y = 2$  在第一象限内所围成的闭区域,

8. 计算  $\iint_D (|x| + |y|) d\sigma$ , 其中  $D: |x| + |y| \leq 2$ .

9. 计算二重积分  $\iint_D e^{\frac{x}{y}} d\sigma$ , 其中  $D$  是由抛物线  $y^2 = x$  及  $x = 0$ ,  $y = 1$  在第一象限内所围成的闭区域,

10. 利用极坐标计算  $\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$ , 其中  $D$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 4$  所围成的闭区域.

### 鱼骨图小结



## 总习题七

### 一、单选题

1. 下列函数中, 有且仅有一个间断点的函数为( ).

A.  $f(x, y) = \frac{y}{x-y}$

B.  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

C.  $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$

D.  $f(x, y) = |xy|$

2. 已知函数  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ , 则  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  满足( ).

A. 极限存在

B. 连续

C. 极限不存在

D. 可微

3. 若二元函数  $z=f(x, y)$  的偏导数存在, 则  $f_x(x_0, y_0)=f_y(x_0, y_0)=0$  是函数  $z$  在点  $(x_0, y_0)$  取得极值的( ).

A. 充分条件

B. 必要条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

4. 下列各式中不能表示为某个函数的全微分的式子为( ).

A.  $ydx + xdy$

B.  $ydx - xdy$

C.  $x dx + y dy$

D.  $x dx - y dy$

5. 设  $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ , 则下列说法中错误的是( ).

A.  $(0, 0)$  是驻点

B.  $(0, 0)$  是极值点

C.  $(0, 0)$  是极小值点

D.  $(0, 0)$  是最小值点

## 二、填空题

1. 平面  $xOy$  上的双曲线  $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$  绕  $x$  轴旋转所得的旋转曲面方程为\_\_\_\_\_.

2. 球面  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6z = 0$  的球心坐标为\_\_\_\_\_, 半径为\_\_\_\_\_.

3.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 3)} \frac{4xy}{\sqrt{5-x^2}} =$ \_\_\_\_\_.

4. 函数  $z=f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微分是这个函数在该点连续的\_\_\_\_\_条件.

5. 已知  $z = x^2 + 3xy + y^2$ , 则  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

1. 某工厂生产一种无盖圆柱形桶, 其内直径和高分别为 3 m 和 4m, 厚度为  $\frac{1}{20}$ m, 问需要多少体积的木材?

2. (2016 年) 计算函数  $z=(x-y)^2$  在点  $(1, 0)$  处当  $\Delta x=0.01$ ,  $\Delta y=-0.02$  时的全增量与全微分.

3. 求函数  $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$  的极值.

4. 求内接于半径为  $R$  的球且有最大体积的长方体.

5. 改变下列积分的积分次序.



$$(1) \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx;$$

$$(2) \int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x, y) dy.$$

6. 计算以  $xOy$  面上的圆周  $x^2 + y^2 = ax$  围成的闭区域为底, 而以曲面  $z = x^2 + y^2$  为顶的曲顶柱体的体积.

#### 四、证明题

1. 设  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , 求证:  $l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = 0$ .

2. 设  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 求证:  $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$ .

## 参 考 文 献

- [1] 同济大学数学科学学院. 高等数学[M]. 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2023.
- [2] 魏莹, 韩飞, 孔亚仙. 高等数学[M]. 长沙: 湖南师范大学出版社, 2019.
- [3] 钱小吾, 王丽芳, 侯丽萍. 高等数学[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2023.
- [4] 汪吉. GeoGebra 可视化与微积分教学[M]. 哈尔滨: 东北林业大学出版社, 2019.
- [5] 薛利敏. 高等数学[M]. 北京: 教育科学出版社, 2019.
- [6] 周志燕, 程黄金. 高等数学[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2019.
- [7] 李华平, 薛颖, 游诗远. 高等数学[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2022.
- [8] 罗佩芳, 赵永叶, 张晓梅. 高等数学[M]. 长沙: 湖南大学出版社, 2022.